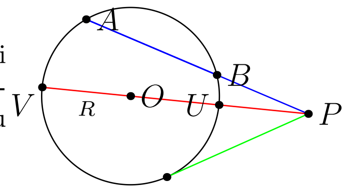
Sieknijmy!

kółko I LO Białystok
11 października 2013

Zadanie 1 Twierdzenie o siecznych



Dany jest okrąg o o środku O i promieniu R oraz punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i przecina okrąg o w (niekoniecznie różnych) punktach A i B, to iloczyn $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a dokładniej

$$|PA| \cdot |PB| = \left| |PO|^2 - R^2 \right|.$$

Zadanie 2

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest rzutem A na BC, zaś punkt E jest rzutem B na AC. Uzasadnij, że $CE \cdot CA = CD \cdot CB$. Punkt H jest punktem przecięcia wysokości $\triangle ABC$. Które z liczb

$$DH \cdot HA, \quad AH \cdot AD, \quad AE \cdot CA, \quad EH \cdot BH,$$

są równe?

Zadanie 3

Punkt P leży na przecięciu stycznych wypuszczonych z punktów A i B leżących na okręgu o środku w O. Punkt K jest środkiem odcinka AB. Uzasadnij, że zachodzi $PA^2 = PK \cdot PO$.

Zadanie 4

Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A, B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $\sphericalangle PXY = \sphericalangle PYX$.

Zadanie 5 Kryterium współokręgowości

Jeżeli punkty S, A, B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o początku w S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Zadanie 6

Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MB \cdot ME = MC \cdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

Zadanie 7 $\star$

Dane są okręgi o_1, o_2 przecinające się w dwóch punktach leżących na prostej m oraz punkt P. Półproste k i l mają początek w P i przecinają: k okrąg o_1 w A, B, zaś l okrąg o_2 w C, D (punkty A, B, C, D są parami różne). Udowodnić, że na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na prostej m.

Zadanie 8

Punkt P leży wewnątrz nierównoramiennego trójkąta ABC. Proste AP, BP, CP przecinają okrąg opisany w punktach D, E, F (przy czym $D \neq A, E \neq B, F \neq C$). Styczna do okręgu opisanego w punkcie C przecina AB w punkcie S takim, że $CS = SP$. Uzasadnij, że SP jest styczną do okręgu opisanego na $\triangle ABP$ oraz że $FD = FE$.