Ściemka!

Czyli po co ludziom dowody?

Niektóre spośród poniższych rozwiązań są błędne merytorycznie, a niektóre inne źle zapisane. Przeistocz się w krwiożerczego Yogiego i znajdź błędy!

1. **Twierdzenie** *Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $3^n = x^2 + y^2$ w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, n.*

   Rozwiązanie.

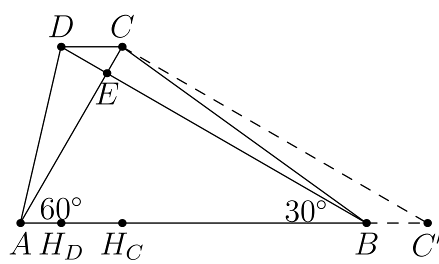
   Równanie to nie ma rozwiązań. Dowód:

   Rozważmy dowolne rozwiązanie $3^n = x^2 + y^2$. Policzmy możliwe reszty z dzielenia x^2 przez 3: $0^2 \equiv 0 \mod 3, 1^2 \equiv 1 \mod 3, 2^2 \equiv 1 \mod 3$, zatem $x^2 \mod 3 \in \{0, 1\}$.

   Oczywiście $1+0 \neq 0 \mod 3, 1+1 \neq 0 \mod 3$, więc jedynym sposobem otrzymania po lewej stronie 0 jest $x \equiv 0 \mod 3, y \equiv 0 \mod 3$. Podstawmy $x = 3x', y = 3y'$. Wtedy $9(x'^2 + y'^2) = 3^n$, czyli $x'^2 + y'^2 = 3^{n-2}$. Rozumujemy analogicznie i stwierdzamy, że $x' = 3x'', y' = 3y''$. Procedurę tę możemy kontynuować dowolnie wiele razy, więc wnioskujemy, że x'', y'' są podzielne przez 3^k dla dowolnego k, co daje sprzeczność.

2. Zadanie
   Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest taki, że $AC = 1, BD = \sqrt{3}, \sphericalangle ABD = 30°$. Wyznacz najmniejszą możliwą sumę długości podstaw tego trapezu.

   Rozwiązanie.

   Niech H_D, H_C oznaczają rzuty D, C na AB, E oznacza punkt przecięcia przekątnych trapezu, a $C' \in AB$ jest takie, że $CDBC'$ jest równoległobokiem.
   Obliczamy, że $DH_D = \sqrt{3}/2$, gdyż trójkąt BDH_D ma kąty $30°, 60°, 90°$ i $BD = \sqrt{3}$. Zatem $AH_C = \sqrt{AC^2 - CH_C^2} = \sqrt{1 - DH_D^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$, czyli trójkąt AH_CC jest połówką trójkąta równobocznego i $\sphericalangle CAH_C = 60°$.
   Skoro $CC' \parallel BD$, to $\sphericalangle CC'A = \sphericalangle DBA = 30°$, więc $\sphericalangle ACC' = 180° - 60° - 30° = 90°$.

   Trójkąt $\triangle ACC'$ jest prostokątny, zatem z twierdzenia Pitagorasa $AB + CD = AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Jest to jedyna możliwa wartość sumy podstaw, więc jest ona najmniejsza.

3. Zadanie
   Wartość wielomianu $f(x) = x^{2011} + a_{2010}x^{2010} + \ldots + a_0$ o współczynnikach całkowitych jest dla każdej liczby całkowitej podzielna przez 2011 oraz $f(x)$ ma 2011 różnych pierwiastków. Udowodnij, że suma tych pierwiastków jest podzielna przez 2011.

   Rozwiązanie.

   Udowodnię, że $f \equiv x^{2011} - x \mod 2011$, tzn. współczynniki wielomianu $f - x^{2011} - x$ są podzielne przez 2011.

   Niech $g := f - x^{2011} - x \mod 2011$. Wielomian g ma stopień nie większy niż 2010. Dla dowolnej liczby całkowitej m zachodzi $m^{2011} \equiv m \mod 2011$ bo 2011 jest pierwsza, czyli $2011 \Big| f(m) + m^{2011} - m = g(m)$.

   To znaczy, że wielomian g ma pierwiastki $(\mod 2011)$ $0, 1, 2, 3, \ldots, 2010$, czyli $g(x) = Q(x)(x - 0)(x-1)\ldots(x-2010) \mod 2011$. Gdyby $Q \neq 0$ to wielomian po prawej stronie miałby stopień

$\geqslant 2011$, czyli większy niż g. Tak więc $Q = 0$ i $g = 0$, czyli $f - x^{2011} - x \equiv 0 \mod 2011$, więc 2011 musi dzielić a_{2010}, bo a_{2010} jest współczynnikiem wielomianu $f - x^{2011} - x$ stojącym przy x^{2010}.

Zachodzi $2011 \Big| a_{2010}$, ale a_{2010} jest równe (-1) pomnożonemu przez sumę pierwiastków f. Tak więc 2011 dzieli tę sumę pierwiastków.

4. ZADANIE

Liczby rzeczywiste $x_1, \ldots, x_{2010}$ są takie, że $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2010}^3 = 2010$. Podać najmniejsze możliwe M rzeczywiste takie, że $x_1^2 + \ldots + x_{2010}^2 \leqslant M$ albo udowodnić, że takie M nie istnieje.

ROZWIĄZANIE.

Przypomnijmy nierówność pomiędzy średnią kwadratową i sześcienną:

Twierdzenie *Dla dowolnych* $n, a_1, \ldots, a_n > 0$ *zachodzi*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{a_1^3 + \ldots + a_n^3}{n}}$$

Stosując tę nierówność dla $n := 2010$, $a_1 := x_1, a_2 := x_2, \ldots, x_{2010} := a_{2010}$ pokazujemy, że

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_{2010}^2}{2010}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + \ldots + x_{2010}^3}{2010}} = 1$$

Zatem $x_1^2 + \ldots + x_{2010}^2 \leqslant 2010$. Wartość ta jest osiągana, jeżeli weźmiemy $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2010}$, czyli $M = 2010$ jest szukaną liczbą.