Kółko 24.11 - indukcja^{-1}

Zadanka

1. Udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest wymierne.
   Załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest wymierne. Jakoże jest ono większe od 0, to można je przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, to gdzie $p, q \in Z_+$. Mamy wtedy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, a po podniesieniu do kwadratu i pomnżeniu przez q^2 dostajemy $2q^2 = p^2$. Załóżmy, że p_0, q_0 jest parą o najmniejszej sumie spełniającą to równanie. Jest $2|p_0^2$, a stąd $2|p_0$. Niech $p_1 = p_0/2$. Wtedy jest $2q_0^2 = 4p_1^2$, więc $4|2q_0^2$ i $2|q_0^2$. Tym samym $2|q_0$ i $q_0 = q_1/2$, gdzie q_1 - całkowite. Mamy więc $2q_1^2 = p_1^2$, co przeczy wyborowi p_0, q_0 jako pary o najmniejszej sumie (bo $p_0 + q_0 > p_1 + q_1$).

2. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ w liczbach całkowitych nieujemnych.
   Weźmy dowolne rozwiązanie tego równania w liczbach x, y, z, t. Mamy dla takich liczb $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$, a stąd $2|t$ i $t/2 = t_1$, $t_1 \in Z$. Podstawiając dostajemy $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = 16t_1^4$, a po podzieleniu przez 2, $4x^4 + 2y^4 + z^4 = 8t_1^4$, z czego wynika, że $2|z$ i $z/2 = z_1$, $z_1 \in Z$. Po kolejnym podstawieniu i podzieleniu dostajemy $2x^4 + y^4 + 8z_1^4 = 4t_1^4$, a więc $2|y$ i $y/2 = y_1$, gdzie $y_1 \in Z$. Powtarzając te operacje dostajemy $2|x$ i $x/2 = x_1$, $x_1 \in Z$. Podstawiając to dostajemy $8x_1^4 + 4y_1^4 + 2z_1^4 = t_1^4$. Otrzymaliśmy to samo równanie, więc podane operacje możemy powturzyć n razy dla dowolnego n, stwierdzając, że $2^n|x$ i $2^n|y$ i $2^n|z$ i $2^n|t$ dla dowolnego n. Jedyną liczbą całkowitą podzielną przez dowolną potęgę 2 jest 0. Tym samym jedynym rozwiązaniem w liczbach całkowitych nieujemnych może być $(0, 0, 0, 0)$. Te liczby faktycznie spełniają równanie.

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ w liczbach $\mathbb{N}_+$.
   Zauważmy, że dla x, y, z, t spełniających to równanie musi być $2|x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. x^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 2, gdy x jest nieparzyste, a 0, gdy x parzyste. Stąd widzimy, że wśród liczb x, y, z, t musi być parzysta ilość nieparzystych. Rozważmy 3 przypadki:
   (a) 4 liczby x, y, z, t są nieparzyste. Jeżeli x jest nieparzyste, to $x^2 \equiv 1(\mod 8)$ (sprawdź), więc $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \equiv 4(\mod 8)$. Ale mamy $2 \not| xyzt$, więc $4 \not| 2xyzt$. Sprzeczność.
   (b) 2 liczby z x, y, z, t są nieparzyste. Wtedy mamy $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \equiv 2(\mod 4)$, więc $4 \not| x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, a $4|xyzt$, więc sprzeczność.
   (c) Wszystkie liczby x, y, z, t są parzyste. Weźmy $x/2 = x_1, y/2 = y_1, z/2 = z_1, t/2 = t_1$. Dostajemy $4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 + 4t_1^2 = 2 \cdot 16x_1y_1z_1t_1$, czyli $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = 8xyzt$. Dalej biorąc $\mod 8$ dostajemy łatwo, że x_1, y_1, z_1, t_1 są parzyste, więc możemy podstawić $x_2 = x_1/2$ itd. Musi więc znowu być $2^n|x, y, z, t$ dla dowolnego $n \in Z_+$, więc $x = y = z = t = 0$. Ale te liczby nie są naturalne dodatnie, więc ostatecznie nie ma rozwiązań.

4. Udowodnić, że 7 nie sa się przedstawić w postaci sumy 3 kwadratów liczb wymiernych dodatnich.
   Mamy $x^2 \equiv 1(\mod 8)$ lub $x^2 \equiv 4(\mod 8)$, lub $x^2 \equiv 0(\mod 8)$.
   Jeżeli $7 = (\frac{p_1}{q_1})^2 + (\frac{p_2}{q_2})^2 + (\frac{p_3}{q_3})^2$, gdzie $p_i, q_i \in Z_+$, to wymnażając stronami $7(q_1q_2q_3)^2 = (p_1q_2q_3)^2 + (q_1p_2q_3)^2 + (p_1p_2q_3)^2$. Jeżeli wykażemy, że równanie $7d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ w całkowitych nie ma rozwiązań, to wykażemy również tezę. Rozpatrzmy to równanie $(\mod 8)$. $a^2 + b^2 + c^2$ daje reszty $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (sprawdź), zaś wyrażenie $7d^2$ daje reszty $0, 7, 4$. Widzimy, że reszty $\mod 8$ są równe tylko jeśli $a^2 + b^2 + c^2$ przystaje do 0 lub 4 $(\mod 7)$, a wtedy liczby (a, b, c, d) są parzyste (sprawdź) i podobnie jak w poprzednich zadaniach wnioskujemy, że $2^n|a, b, c, d$ dla dowolnego n.

5. Udowodnij, że liczba postaci $4^n(8k - 1)$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$ nie jest kwadratem innej liczby naturalnej i nie może być przedstawiona jako suma 1, 2 lub 3 kwadratów liczb naturalnych dodatnich.
   Mamy udowodnić, że $4^n(8k - 1) = a^2 + b^2 + c^2$, gdzie $a, b, c \in N_+ \cup \{0\}$ nie ma rozwiązań. Faktycznie jeżeli $n = 0$, to patrząc $\mod 8$ otrzymujemy speczność bo $a^2 + b^2 + c^2(\mod 8) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Jeżeli zaś $n > 0$, to patrząc $\mod 4$ dowiadujemy się, że $2|a, b, c$ i możemy podstawić $a_1 = a/2$ i $b_1 = b/2$, $c_1 = c/2$ i podzielić przez 4, a dzielić przez 4 możemy skończoną ilość razy.