Kółko 24.11 - indukcja^{-1}

Teoria

1. Zasada nieskończonego schodzenia (bez formalnej definicji, bo to się może przyśnić).

Zadanka :)

1. Udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest wymierne.
2. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$ w liczbach całkowitych nieujemnych.
3. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$ w liczbach $\mathbb{N}_+$.
4. Udowodnić, że 7 nie sa się przedstawić w postaci sumy 3 kwadratów liczb wymiernych dodatnich.
5. Udowodnij, że liczba postaci $4^n(8k-1)$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$ nie jest kwadratem innej liczby naturalnej i nie może być przedstawiona jako suma 1, 2 lub 3 kwadratów liczb naturalnych dodatnich.
6. Ciąg $a_1, ..., a_n$ $(a_i \in \mathbb{N}_+)$ przetwarzamy na ciąg postaci $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, ..., \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$, ten ciąg przetwarzamy analogicznie itd. Udowodnij, że po pewnej liczbie takich operacji albo otrzymany ciąg będzie stały, albo będzie on zawierać wyrazy niecałkowite.
7. Niech $a_1, ..., a_{2^n}$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Udowodnij, że jeśli utworzymy z niego nowy ciąg $l_1, l_2, \cdots, l_{2^n}$ według reguły $l_k = |a_{k+1} - a_k|$ (umawiamy się, że $a_{2^n+1} = a_1$), a niego następny ciąg itd., to w końcu dojdziemy do ciągu złożonego z samych zer. Czy dla ciągu (a_n) jest to nadal prawdziwe, gdy n nie jest potęgą 2?