Różności

1. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, q, r, że

$$\frac{pqr}{p+q+r} = 11.$$

2. Zbiór M tworzą wszystkie liczby siedmiocyfrowe zapisane przy pomocy cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ tak, że żadna cyfra nie powtarza się. Rozstrzygnąć, czy w zbiorze M istnieje 5 takich liczb, że suma trzech z nich jest sumą dwóch pozostałych.

3. Udowodnij, że dla żadnej liczby naturalnej $n > 2$ nie istnieją wielomiany o współczynnikach całkowitych dodatnich P, Q, R, takie, że

$$P^n + Q^n = R^n.$$

4. Okręgi w promieniach r_1 i r_2 przecinają się w punktach A i B oraz są styczne do okręgu o o promieniu r wewnętrznie w punktach C i D odpowiednio. Uzasadnić, że jeśli punkty B, C, D są współliniowe to $r = r_1 + r_2$.

5. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

6. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem ostrokątnym, a H będzie ortocentrum $\triangle ABC$. Uzasadnij, w zależności od długości boków $\triangle ABC$, który z okręgów opisanych na trójkątach $\triangle ABH, \triangle BCH, \triangle CAH$ ma największy promień.

7. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Podaj warunek na to, żeby na boku AC istniał punkt S taki, że $AS \cdot CS = BS^2$. W przypadku, gdy taki punkt istnieje, podać konstrukcję.

8. Znajdź wszystkie takie liczby naturalne $n \geqslant 2$, że wszystkie liczby naturalne mniejsze od n i względnie pierwsze z n tworzą ciąg arytmetyczny.