OMG i wspominki

1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2 + b \text{ oraz } b^2 + a$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg styczny do AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q. Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ.

3. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

4. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Źródło: Zadania pochodzą z finału VI OMG

5. Rozważmy sześcian $ABCDA'B'C'D'$.
   (a) Uzasadnij, że obrót wokół osi AC', w którym punkt D' przechodzi na B', przenosi sześcian $ABCDA'B'C'D'$ w siebie tzn. każdy punkt sześcianu przechodzi na punkt sześcianu.
   (b) Oblicz, ilukrotne złożenie powyższego obrotu jest identycznością?
   (c) Podzielmy sześcian $ABCDA'B'C'D'$ na 27 sześcianików jednostkowych. Wskaż sześcianiki, które przechodzą w siebie przy ww. obrocie.
   (d) Niech π będzie płaszczyzną prostopadłą do AC' i przechodzącą przez środek tego odcinka. Uzasadnij, że ww. obrót zachowuje π oraz że ilość sześcianików, które przecina π musi przystawać do $1 \mod 3$.
   (e) * Rozważ symetrię względem środka sześcianu i rozszerz poprzednie rozumowanie, aby wykazać, że ilość sześcianików, które przecina π, przystaje do $1 \mod 6$.
   (f) * Wykaż, że część wspólna π i $ABCDA'B'C'D'$ to sześciokąt foremny o wierzchołkach leżących na środkach tych krawędzi sześcianu, których "końcem" (wierzchołkiem) nie jest A lub C'.

6. Przypomnijmy, że $\varphi(n)$ oznacza ilość liczb naturalnych względnie pierwszych z liczbą całkowitą dodatnią n i nie większych od n. Np. $\varphi(12) = 4$, $\varphi(p) = p - 1$ dla każdej liczby pierwszej p, $\varphi(1) = 1$ itd.
   (a) Liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ możemy w naturalny sposób utożsamić z resztami z dzielenia przez n (jak ktoś nie zrozumiał, to nie szkodzi) i oznaczać $1 \mod n, 2 \mod n, \ldots, n \mod n$.
   (b) Niech $n = ab$ będzie takim iloczynem, że $NWD(a, b) = 1$. Uzasadnij, że liczba $x \mod n$ jest względnie pierwsza z n wtedy i tylko wtedy, gdy $x \mod a$ jest względnie pierwsze z a i x mod b jest względnie pierwsze z b.
   (c) Uzasadnij, że istnieje dokładnie $\varphi(a)\varphi(b)$ liczb względnie pierwszych z n i mniejszych od n; każda z tych liczb jest wyznaczona przez reszty $\mod a$ i $\mod b$.
   Wskazówka: chińskie o resztach.
   (d) Stąd też $\varphi(n) = \varphi(a)\varphi(b)$ o ile tylko $NWD(a, b) = 1$. Podaj przykład, że założenie $NWD(a, b) = 1$ jest istotne.
   (e) Oblicz "na piechotę" $\varphi(p^k)$, gdzie p jest pierwsze i udowodnij wzór

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

   jeżeli $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze.