Ciąg Fibonacciego

Pierścienie

1. **Definicja** *Pierścieniem (z jedynką) będę nazywać zbiór R, z określonymi działaniami $+$ i $\cdot$ takimi, że*

   (a) *R jest grupą* ***przemienną*** *ze względu na $+$, której element neutralny oznaczam 0.*

   (b) *Dla wszystkich $a, b \in R$ mamy $a \cdot b \in R$.*

   (c) *Działanie $\cdot$ jest łączne, tj. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dla wszystkich $a, b, c \in R$.*

   (d) *Istnieje element neutralny mnożenia $e \in R$:*

   $$ea = ae = a$$

   dla wszystkich $a \in R$. Element ten jest jedyny (dowód jak w grupach, patrz poprzednie kółko), oznaczamy go 1 i nazywamy jedynką.

   (e) *Działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$:*

   $$(a + b)c = ac + bc$$

   $$c(a + b) = ca + cb$$

   dla wszystkich $a, b, c \in R$.

   Dla każdego $a \in R$ zachodzi

   $$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

   odejmujemy $a \cdot 0$ stronami i otrzymujemy $0 = a \cdot 0$.
   Dla każdych $a, b \in R$ zachodzi

   $$-ab = (-a)b = a(-b)$$

   Dowód: $ab - ab = 0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$, stąd $-ab = a(-b)$. Analogicznie $ab - ab = 0 = (a + (-a))b = ab + (-a)b$, więc $-ab = (-a)b$.

2. Tak naprawdę warunki na bycie pierścieniem są bardzo słabe i większość zbiorów z działaniami, jakie znane są w liceum jest pierścieniami: liczby rzeczywiste, wymierne, całkowite, wielomiany o współczynnikach np. rzeczywistych itd.

3. **Definicja** *Niech R będzie pierścieniem. Jeżeli dla elementu $a \in R$ istnieje $b \in R$ takie, że*

   $$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

   to powiemy, że element a jest odwracalny.

   Definicja *Niech R będzie pierścieniem. Powiemy, że R jest przemienny, jeżeli*

   $$a \cdot b = b \cdot a$$

   dla wszystkich $a, b \in R$.

Teoria macierzy

1. **Definicja** *Macierzą o wymiarach 2×2 o elementach ze pierścienia R nazywamy układ $2 \cdot 2 = 4$ liczb $a, b, c, d \in R$ zapisany w postaci*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Zbiór wszystkich macierzy oznaczamy $\mathbb{M}_2(R)$.
Na początku, jeżeli wygląda to zbyt okropnie weź $R = \mathbb{R}$, czyli macierze o wyrazach rzeczywistych.

2. Macierze z danego zbioru możemy dodawać:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

i mnożyć, nieco bardziej skomplikowanie (polecam http://pl.wikipedia.org/wiki/Mnożenie_macierzy):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

dodatkowo możemy na macierzach zdefiniować mnożenie przez stałą $r \in R$.

$$r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{bmatrix}$$

3. **Twierdzenie** *Dla dowolnego pierścienia R macierze $\mathbb{M}_2(R)$ tworzą pierścień z działaniami $+$ i $\cdot$. Elementem neutralnym tego pierścienia jest macierz*

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli ponadto pierścień R jest przemienny, to zachodzi

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} A$$

dla wszystkich macierzy $A \in \mathbb{M}_2(R)$.

DOWÓD. Aby udowodnić, że macierze są pierścieniem wystarczy przeliczyć wszystkie własności pierścienia. Podobnie można policzyć, że I jest jedynką.
Przeliczę tylko ostatnie stwierdzenie. Niech $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$ oraz $r \in R$ wtedy

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}r & a_{12}r \\ a_{21}r & a_{22}r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

■

4. Aby uprościć robotę nieinteresujące mnie elementy macierzy będę oznaczać $*$. Nigdy nie będę ich wyliczać, **ich wartość nie będzie miała wpływu na przekształcenia**. Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = I = \ldots$$

elementy $*$ należy rozumieć jako elementy macierzy sąsiedniej (tutaj I).

Teoria ciągu Fibonacciego

1. **Definicja** *Ciągiem* ***Fibonacciego*** *nazywamy ciąg rekurencyjny* (F_n) *dany równaniami:*

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ dla } n \geq 2$$

Kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego to:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Dla wygody zdefiniujemy również wyrazy o indeksach ujemnych, tak, żeby zachowana była własność $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$*. W tym celu należy wziąć* $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$*.*

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Macierzą ciągu Fibonacciego nazywamy macierz

$$\mathbb{F} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Jest ona odwracalna w } \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}), \text{ jej odwrotnością jest } \mathbb{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Równanie: Bezpośrednio przeliczamy, że

$$\mathbb{F}^2 - \mathbb{F} - I = 0 \text{ stąd wynika po podzieleniu } \mathbb{F} = \frac{1}{\mathbb{F} - I}$$

Ważna uwaga/metatwierdzenie: Jeżeli rozpatrujemy tylko wyrażenia zawierające $\mathbb{F}$ oraz rI, gdzie $r \in \mathbb{R}$, to każde dwa takie wyrażenia będą przemienne ze sobą.

2. **Lemat (Postać macierzowa ciągu)** *Dla każdego* n *całkowitego*

$$\mathbb{F}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dowód. Bezpośrednio przeliczamy, że dla $n = 0$ i $n = 1$ równość jest prawdziwa. Przeprowadzamy indukcję po n rosnącym i malejącym. Przykładowo – krok indukcyjny w indukcji po n rosnącym

$$\mathbb{F}^{n+2} = \mathbb{F}^n \mathbb{F}^2 = \mathbb{F}^n(\mathbb{F} + I) = \mathbb{F}^{n+1} + \mathbb{F}^n = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+2} + F_{n+1} & F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

co było do udowodnienia. Ten dowód korzysta bardzo mocno ze struktury algebraicznej macierzy. ■

Własności ciągu Fibonacciego – zadania prostsze

1. Uzasadnić (elementarnie jest prościej :), że każde dwa kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego są są względnie pierwsze.

2. Uzasadnić, że dla wszystkich liczb naturalnych n, m zachodzi

$$F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} = F_{m+n}$$

3. W szczególności dla wszystkich liczb naturalnych n zachodzi

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

4. Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnić, że

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

5. Niech n będzie liczbą naturalną. Uzasadnić, że

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

7. Uzasadnić, że dla wszystkich n naturalnych zachodzi

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Dalsze własności pierścieni

1. **Definicja** *Niech R będzie pierścieniem. Podzbiór J pierścienia R nazywamy ideałem jeżeli:*

   (a) I jest podgrupą przemienną ze względu na $+$.

   (b) Dla dowolnego $r \in R, i \in I$ zachodzi

   $$r \cdot i \in I \text{ oraz } i \cdot r \in I$$

   J jest ideałem R oznaczamy przez $J \lhd R$.

2. Pojęcie ideału rozszerza pojęcie kongruencji:
   Piszemy $a \equiv b \mod I$ jeżeli $b - a \in I$. Załóżmy, że

   $$a \equiv b \mod I, \quad c \equiv d \mod I$$

   Wtedy (m. in.)

   $$b \equiv a \mod I$$
   $$a + c \equiv b + d \mod I$$
   $$a - c \equiv b - d \mod I$$
   $$ac \equiv bd \mod I$$

   Udowodnię dla przykładu ostatnią (najtrudniejszą) własność.

   $$a \equiv b \mod I \Rightarrow a - b \in I \Rightarrow (a-b)c \in I$$
   $$c \equiv d \mod I \Rightarrow d - c \in I \Rightarrow b(d-c) \in I$$
   $$(a-b)c \in I,\ b(d-c) \in I \Rightarrow ac - bd = (a-b)c - b(d-c) \in I \Rightarrow ac \equiv bd \mod I$$

3. Naturalne w tym kontekście jest zauważenie, że dla ustalonego $n \in \mathbb{Z}$ zbiór postaci

   $$I_n := \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

   jest ideałem w $\mathbb{Z}$. Kongruencje $\mod I_n$ to znane nam kongruencje $\mod n$.

4. **Lemat** *Rozważmy macierze $\mathbb{M}_2(R)$ i niech $I \lhd R$. Zdefiniujmy*

   $$\mathbb{M}_2(I) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R \mid a, b, c, d \in I \right\}$$

   Wtedy $\mathbb{M}_2(I)$ jest ideałem w $\mathbb{M}_2(R)$.

   Dowód. Na początku udowodnimy, że $\mathbb{M}_2(I)$ jest podgrupą przemienną. Wystarczy (patrz kółko o grupach) udowodnić, że

   $$A, B \in \mathbb{M}_2(I) \Rightarrow A + B \in \mathbb{M}_2(I) \text{ oraz } -A \in \mathbb{M}_2(I)$$

   Rozważmy $A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Z definicji $\mathbb{M}_2(I)$ wynika, że $a_i, b_i \in I$. W związku z tym również (z własności ideału I):

   $$a_{11} - b_{11} \in I, a_{12} - b_{12} \in I \ldots$$

a stąd

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(I)$$

z definicji $\mathbb{M}_2(I)$. $-A \in \mathbb{M}_2(I)$ udowadniamy analogicznie.

Pozostaje udowodnić drugą własność ideałów. Rozważmy dowolną $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$ i dowolną $\begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(R)$:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}i_{11} + c_{12}i_{21} & c_{11}i_{12} + c_{12}i_{22} \\ c_{21}i_{11} + c_{22}i_{21} & c_{21}i_{12} + c_{22}i_{22} \end{bmatrix}$$

Widać, że np. w pierwszej komórce $i_{11} \in I$ stąd $c_{11}i_{11} \in I$, analogicznie $c_{12}i_{21} \in I$, więc $c_{11}i_{11} + c_{12}i_{21} \in I$. Pozostałe wartości również należą do I, więc cała macierz należy do $\mathbb{M}_2(I)$ (z definicji $\mathbb{M}_2(I)$).
Drugą część drugiej własności udowadniamy analogicznie. ■

Własności ciągu Fibonacciego – zadania trudniejsze

1. Uwaga: poniższe dwa zadania można zrobić elementarnie, korzystając z tożsamości $F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} = F_{m+n}$ oraz z lematu w zadaniu drugim, ale dowody są (moim zdaniem) *trudniejsze* do wymyślenia i *mniej naturalne*, oczywiście z dokładnością do pewnego zrozumienia pojęć abstrakcyjnych.

2. **Twierdzenie (*)** *Jeżeli liczby $n, m \in \mathbb{Z}_+$ oraz $n \mid m$ to*

$$F_n \mid F_m$$

3. **Twierdzenie (*)** *Dla wszystkich liczb naturalnych n, m zachodzi równość*

$$NWD(F_n, F_m) = F_{NWD(n,m)}$$

4. **Twierdzenie (**Wzór Bineta)** *Niech $\phi_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi_2 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, innymi słowy, niech będą to pierwiastki równania $x^2 - x - 1 = 0$. Wtedy*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_1^n - \phi_2^n)$$

dla wszystkich liczb całkowitych n.