Elimki elimki

Eliminacje trwają 2h. Nie spodziewam się, że wszyscy zrobią po 4 zadania w tak krótkim czasie – rzuciłem aż cztery, żeby każdy znalazł coś dla siebie.

1. Liczby x, y, z, t są rzeczywiste dodatnie. Uzasadnić, że

   (a) $\sqrt{x^2+y^2+z^2+2xy} < x + \sqrt{y^2+z^2}$

   Dowód. *Można to oczywiście rozpałować przez podnoszenie do kwadratu, podobnie jak następny podpunkt, ale rozwiązanie jest inne.*

   Niech $X = (0,0), Y = (x,0), Z = (x+y, z)$. Nierówność z zadania można równoważnie zapisać jako

   $$|XZ| < |XY| + |YZ|$$

   a to jest nierówność trójkąta. ∎

   (b) $\sqrt{x^2+z^2} < \sqrt{x^2+t^2} + \sqrt{t^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2}$

   Dowód. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, niech:

   $$A = (-z, 0),\ B = (0, y),\ C = (t, 0),\ D = (0, -x)$$

   Wtedy nierówność przekształca się po postaci

   $$|AD| < |DC| + |CB| + |BA|$$

   prawdziwej na mocy nierówności trójkąta:

   $$|AD| < |DC| + |CA| < |DC| + |CB| + |BA|$$

   przy czym żadne 3 punkty nie są współliniowe, więc nierówność trójkąta można stosować. ∎

2. Znaleźć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych, takich, że

   dla każdej niezerowej liczby całkowitej x liczba $x^2 + ax + b$ jest pierwsza.

   Rozwiązanie. **Odpowiedź:** Takie pary nie istnieją.

   Niech pomocniczo $f(x) = x^2 + ax + b$.

   Załóżmy, że taka para (a, b) istnieje, czyli $f(x)$ jest pierwsze dla wszystkich x poza 0.

   Rozważmy najpierw przypadek $b = 0$. Mamy wykazać, że $x(x + a)$ jest pierwsze dla wszystkich x poza 0 – to jest oczywista bzdura.

   A więc $b \neq 0$. Możemy zatem twierdzić, że dla każdego k niezerowego liczba

   $$f(kb) = k^2b^2 + akb + b = b(k^2b + ka + 1)$$

   jest pierwsza.

   Załóżmy, że $b \neq 1$ i $b \neq -1$, a więc dla każdego niezerowego całkowitego k musi być $k^2b + ka + 1 = 1$ lub $k^2b + ka + 1 = -1$, gdyż iloczyn b i $k^2b + ka + 1$ jest liczbą pierwszą.

   Wielomian $bx^2 + xa + 1$ przyjmuje nieskończenie wiele razy wartość 1 lub nieskończenie wiele razy wartość -1 (we wszystkich nieskończenie wielu liczbach całkowitych niezerowych przyjmuje jedną z tych wartości). Ale wielomian, który nieskończenie wiele razy przyjmuje tę samą wartość jest stały (*to jest użycie mocnej teorii*), zatem $bx^2 + xa + 1 \equiv 0$ (równość wielomianów), $b = 0$, sprzeczność.

Z tego wszystkiego wynika $b = \pm 1$.

Załóżmy, że $a \neq 0$. Wtedy $-a \neq 0$, więc

$$f(-a) = b$$

jest pierwsza. Ale to nieprawda, gdyż $b = \pm 1$.

Zatem $a = 0$. Skoro $b = \pm 1$ to mamy już tylko dwa przypadki:

$$x^2 + 1 \text{ lub } x^2 - 1$$

wartości obu tych wyrażeń nie są liczbami pierwszymi już dla $x = 3$. Sprzeczność.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę $45°$ oraz $|AB| = 1$. Punkty D, E leżą na bokach BC, AC odpowiednio, oraz $AD \perp BC$, $BE \perp AC$. Obliczyć $|DE|$, odpowiedź uzasadnić.

   Dowód. Rozwiązanie znajduje się na oficjalnej stronie podlaskiego konkursu matematycznego – tj. na signum.pb.bialystok.pl lub (może w jakiejś przyszłości) www.ptm.pb.bialystok.pl

   w dziale "Konkurs Matematyczny PB 2010" zadania przygotowawcze dla gimnazjum – rozwiązania. ■

4. Wykazać, że istnieje liczba postaci $11\dots1$ podzielna przez 7052010705201.

   Dowód. Niech $n = 7052010705201$. Zauważmy, że liczba n jest względnie pierwsza z 10 tj. $NWD(n, 10) = 1$.

   Bierzemy liczby

$$1, 11, 111, \dots, \underbrace{11\dots11}_{n+1}$$

   Jest ich $n+1$ a reszt z dzielenia przez n jest n, więc któreś dwie dają równe reszty z dzielenia przez n:

$$n | \underbrace{11\dots11}_{k} - \underbrace{11\dots11}_{l} = \underbrace{11\dots1}_{k-l}\underbrace{0\dots0}_{l}$$

   dla pewnych $k < l$.

   Ale n jest względnie piewsze z 10, więc

$$n | \underbrace{11\dots1}_{k-l}\underbrace{0\dots0}_{l} = \underbrace{11\dots1}_{k-l} \cdot 10^l \text{ implikuje } n | \underbrace{11\dots1}_{k-l}$$

   to kończy dowód. ■