Eliminacje do PTM

1. Dany jest kwadrat 4×4 wypełniony jedynkami oprócz trzech miejsc na przekątnej, gdzie wpisane są -1. Ruch polega na zmianie znaku wszystkich liczb w wierszu, kolumnie, lub na dużej przekątnej. Rozstrzygnij, czy da się zamienić wszystkie liczby na jedynki.

   Rozwiązanie.

   Odpowiedź: Nie da się.

   Udowodnimy, że ilość -1 na planszy jest stale nieparzysta. Z tego wyniknie, że nie da się zamienić wszystkich liczb na jedynki, gdyż jeżeli dałoby się, to po ostatnim ruchu ilość -1 byłaby równa 0, a więc parzysta.

   Przed wykonaniem jakiekolwiek ruchu ilość -1 jest nieparzysta – mamy w 3 polach -1.

   Zauważmy, że ruch nie zmienia parzystości ilości -1.

   W każdym ruchu zmieniany parzystość 4 liczb. Załóżmy, że przed ruchem w tych liczbach było k liczb równych -1. Po ruchu -1 będzie $4-k$. Zatem ilość -1 *zmieni się* o $4-k-k = 2(2-k)$, czyli o liczbę parzystą, zatem parzystość ilości -1 nie zmieni się.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 120.

   Rozwiązanie.

   $120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$, więc wystarczy sprawdzić, dla których n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 3, przez 5 i przez 8.

   Zauważmy po pierwsze, że

   $$n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

   Bezpośrednio sprawdzając reszty z dzielenia przez 3 (tj. przypadki $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$) i przez 5 stwierdzamy, że

   $$3 | n^5 - n \text{ i } 5 | n^5 - n$$

   dla *wszystkich* n.

   Te podzielności są szczególnymi przypadkami tzw. małego twierdzenia Fermata, mówiącego, że $p | m^p - m$ jeżeli liczba p jest pierwsza, a m dowolna całkowita.

   A więc mamy rozstrzygnąć, dla jakich n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 8.

   Rozważmy przypadek n parzystego i nieparzystego.

   (a) $2 | n$. Wynika stąd, że $2 \nmid n-1$, $2 \nmid n+1$ i $2 \nmid n^2+1$.
   A więc $8 | n^5 - n = n(n+1)(n-1)(n^2+1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $8 | n$.

   (b) $2 \nmid n$, zatem $2 | n-1$, $2 | n+1$, $2 | n^2+1$, więc

   $$8 \mid (n-1)(n+1)(n^2+1) \mid n^5 - n$$

   Odpowiedź: $120 | n^5 - n$ dla n podzielnego przez 8 lub nieparzystego.

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

   $$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$$

   Dowód.

Nierówność jest równoważna nierówności

$$\left(\frac{a}{2} + c - b\right)^2 \geq 0$$

która jest oczywiście prawdziwa. ■

4. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, k, l, m oznaczają symetralne odcinków AI, BI, CI odpowiednio. Oznaczmy jako X, Y, Z punkty przecięcia prostych k, l, l, m, m, k. Uzasadnić, że na sześciokącie $ABCXYZ$ da się opisać okrąg.

   Dowód.

   Lemat 1.1 *Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego ABC, S oznacza punkt przecięcia AI z okręgiem o. Wtedy*

   $$|BS| = |CS| = |IS|$$

   Dowód.

   Prosta AI jest dwusieczną, zatem $\angle SAB = \angle SAC$. Ponadto $\angle SAB = \angle SCB$ i $\angle SAC = \angle SBC$ na mocy równości kątów wpisanych w okrąg. Łącząc te zależności uzyskujemy

   $$\angle SCB = \angle SBC$$

   a więc $|SB| = |SC|$.

   Pozostaje udowodnić $|SB| = |SI|$.

   Oznaczmy $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle ABC$, $\gamma := \angle BCA$.

   Popatrzmy na trójkąt $\triangle ISB$. Mamy

   $$\angle IBS = \beta/2 + \alpha/2 \text{ oraz } \angle ISB = \gamma$$

   zatem $\angle SIB = 180° - \beta/2 - \alpha/2 - \gamma = \alpha/2 + \beta/2 = \angle IBS$.

   Tak więc trójkąt ISB jest równoramienny – $|IS| = |BS|$, co kończy dowód. ■

   Wracając do zadania rozważmy punkt S przecięcia AI z okręgiem opisanym na ABC. Lemat orzeka, że zachodzą równości

   $$|SI| = |SB| \text{ oraz } |SI| = |SC|$$

   Przypomnijmy: Symetralna danego odcinka KL to inaczej zbiór *wszystkich* punktów równoodległych od K i L.

   Z powyższych równości wynika, że S leży na symetralnej BI i na symetralnej CI. Zatem $S = Y$, czyli punkt Y leży na okręgu opisanym na ABC. Rozpatrując analogicznie przecięcia BI i CI z okręgiem dowodzimy, że również punkty X i Z leżą na okręgu opisanym na ABC, zatem na sześciokącie $ABCXYZ$ da się opisać okrąg. ■