



Eliminacje do PTM

1. Dany jest kwadrat 4×4 wypełniony jedynkami oprócz trzech miejsc na przekątnej, gdzie wpisane są -1 . Ruch polega na zmianie znaku wszystkich liczb w wierszu, kolumnie, lub na dużej przekątnej. Rozstrzygnij, czy da się zamienić wszystkie liczby na jedynki.
2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 120.
3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$$

4. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC , k, l, m oznaczają symetralne odcinków AI, BI, CI odpowiednio. Oznaczmy jako X, Y, Z punkty przecięcia prostych k, l, l, m, m, k . Uzasadnić, że na sześciokącie $ABCXYZ$ da się opisać okrąg.