Eliminacje do PTM

1. Dany jest graf nieskierowany, prościej mówiąc wierzchołki połączone krawędziami (co najwyżej jedna krawędź pomiędzy dwoma różnych wierzchołkami, nie ma krawędzi prowadzących z wierzchołka do tego samego wierzchołka). *Stopniem* wierzchołka nazywamy ilość krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Uzasadnić, że pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień.

   Dowód. Załóżmy, że graf ma $n \geq 1$ wierzchołków.

   Zauważmy, że z warunków zadania wynika, że wierzchołek może mieć stopień

   $$0, 1, \ldots, n-1$$

   Rozważmy dwa przypadki:

   (a) Istnieje wierzchołek stopnia 0.
   Wierzchołek stopnia 0 nie jest połączony z żadnym wierzchołkiem, więc żaden wierzchołek nie jest połączony z nim, czyli nie istnieje wierzchołek stopnia $n-1$.
   Mamy n wierzchołków i $n-1$ możliwych stopni: $0, 1, \ldots, n-2$. Któreś dwa wierzchołki muszą mieć ten sam stopień.

   (b) Analogicznie jak w przypadku poprzednim – mamy n wierzchołków i $n-1$ możliwych stopni: $1, 2, \ldots, n-1$.

   ■

2. Uzasadnij, że liczba postaci $8k-1$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$ nie może być przedstawiona w postaci sumy trzech kwadratów liczb całkowitych.

   Dowód. Kwadraty liczb całkowitych dają reszty $0, 1, 4$ z dzielenia przez 8:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^2 \mod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

   Zauważmy tutaj, że $(n-k)^2 \equiv k^2 \mod n$, *więc wystarczyłoby policzyć reszty* $0, 1, 2, 3, 4$, *co jest krótsze :)*

   Gdyby zachodziła równość

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 8k - 1$$

   dla pewnych $x, y, z, k \in \mathbb{Z}$, to musiałaby także zajść równość

   $$r_x + r_y + r_z \equiv -1 \mod 8$$

   gdzie $r_x, r_y, r_z \in \{0, 1, 4\}$.

   Taka równość nie zachodzi – bezpośrednio sprawdzamy wszystkie możliwości. ■

3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n część całkowita liczby

   $$\frac{n^2 + n}{3}$$

   jest parzysta.

   Dowód. Najprościej bezpośrednio to przeliczyć.

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą, $n = 3k + r$ gdzie $0 \leq r \leq 2$. Obliczam:

$$\left\lfloor \frac{n^2+n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9k^2+6kr+r^2+3k+r}{3} \right\rfloor = (3k^2+k) + 2kr + \left\lfloor \frac{r^2+r}{3} \right\rfloor$$

Wystarczy sprawdzić, że wszystkie wyrazy sumy po prawej są parzyste.

$2kr$ jest parzyste.

$3k^2 + k$ jest także parzyste, gdyż

$$3k^2 = 2k^2 + k^2 \equiv k^2 \equiv k \mod 2$$

$$3k^2 + k \equiv 2k \equiv 0 \mod 2$$

Parzystość $\left\lfloor \frac{r^2+r}{3} \right\rfloor$ przeliczamy bezpośrednio podstawiając $r = 0, 1, 2$. ■

4. Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A, B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $|PX| = |PY|$.

   Dowód.

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie o siecznych, wersja ze styczną) *Niech dany będzie okrąg o i punkt P leżący poza okręgiem o. Prosta PC jest styczna do o w C, inna prosta przechodząca przez P przecina o w A, B. Wtedy*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

Stosuję twierdzenie dla punktu P, okręgu O_1 i prostej AB:

$$|PX|^2 = |PA| \cdot |PB|$$

oraz punktu P, okręgu O_2 i prostej AB:

$$|PY|^2 = |PA| \cdot |PB|$$

Uwaga: tutaj po cichu korzystamy z założenia, że AB jest wspólną cięciwą O_1 i O_2.

Łącząc powyższe równości: $|PX|^2 = |PY|^2$, a więc $|PX| = |PY|$. ■