Eliminacje do PTM – @gmail

1. Ambasadorów 2009 państw posadzono przy okrągłym stole, na którym umieszczone są proporczyki państw. Niestety żaden ambasador nie siedzi przy proporczyku swojego państwa. Uzasadnij, że można tak obrócić stół, że co najmniej dwóch ambasadorów będzie siedziało przy właściwych proporczykach.

   Dowód. Mamy 2009 różnych obrotów stołu – obroty o $0, 1, \ldots, 2008$. Dla obrotu o i niech Amb_i oznacza liczbę ambasadorów siedzących przy swoich proporczykach. W szczególności z zadania wynika $Amb_0 = 0$.

   Każdy ambasador musi przy którymś obrocie trafić na swój proporczyk, więc

$$Amb_0 + Amb_1 + \cdots + Amb_{2008} \geq 2009$$

   Uwzględniając $Amb_0 = 0$:

$$Amb_1 + \cdots + Amb_{2008} \geq 2009$$

   Mamy 2008 liczb, których suma jest równa 2009, zatem któraś z tych liczb musi być większa od 1, co dowodzi (jeżeli przypomnimy sobie co znaczyło Amb) tezy. ■

2. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $1! + 2! + \cdots + n!$ jest kwadratem liczby całkowitej?

   Rozwiązanie.

   Odpowiedź: Dla $n = 1$ i $n = 3$.

   Przypadki $n = 1, 2, 3, 4$ przeliczamy ręcznie.

   Niech teraz $n \geq 5$.

   Liczby $5!, 6!, \ldots, n!$ są podzielne przez 10, zatem

$$1! + 2! + \cdots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 3 \mod 10$$

   Z drugiej strony możemy przeliczyć, że kwadraty nie dają reszty 3 z dzielenia przez 10:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \mod 10$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

   A więc dla $n \geq 5$ liczba $1! + 2! + \cdots + n!$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

3. Na ile sposobów da się pokryć kwadrat 15×15 kwadratami 3×3 i 5×5?

   Rozwiązanie. Załóżmy, że mamy dane takie pokrycie a kwadratami 3×3 i b kwadratami 5×5. Patrząc na równość pól

$$15^2 = 3^2 \cdot a + 5^2 \cdot b$$

   stwierdzam, że musi być $5^2 | a$, gdyż $5^2 | 15^2$ i $5^2 | 5^2 b$. Oczywiście $3^2 a \leq 15^2$, zatem $a \leq 5^2$, a więc łącznie

$$a = 0 \text{ lub } a = 25$$

   Mamy dokładnie dwa pokrycia – tylko kwadratami 3×3 i tylko kwadratami 5×5, odpowiadające wartościom $a = 25$ i $a = 0$.

4. Dwa rozłączne okręgi o_1, o_2 są wpisane w kąt BAC, tak, że okrąg o_1 jest styczny do prostej BA w X, zaś okrąg o_2 jest styczny do AC w Y. Prosta XY przecina o_1 jeszcze w X', zaś o_2 w Y'. Uzasadnij, że $|XX'| = |YY'|$.

   Dowód. Bez straty ogólności niech o_1 leży bliżej A niż o_2.

Niech T, Z będą punktami styczności: o_1 do AC i o_2 do AB.

Stosujemy dwa razy równość stycznych:

$$|TY| = |AY| - |AT| = |AZ| - |AX| = |XZ|$$

Twierdzenie 1.1 (Twierdzenie o siecznych, wersja ze styczną) *Niech dany będzie okrąg o i punkt P leżący poza okręgiem o. Prosta PC jest styczna do o w C, inna prosta przechodząca przez P przecina o w A, B. Wtedy*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

Stosujemy twierdzenie o siecznych dla punktu X i okręgu o_2:

$$|XY'| \cdot |XY| = |XZ|^2$$

oraz dla punktu Y i okręgu o_1:

$$|YX'| \cdot |XY| = |YT|^2$$

Skoro $|XZ| = |YT|$, to

$$|XY'| \cdot |XY| = |YX'| \cdot |XY|$$

$$|XY'| = |YX'|$$

$$|YY'| = |XY| - |XY'| = |XY| - |YX'| = |XX'|$$

■