Eliminacje — klasy drugie

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których $\frac{k^2+50}{k+5}$ jest liczbą całkowitą.

2. Na kółku Yogiego Seba przepisywał zadanie: "Rozważmy wszystkie ciągi 2011 liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_{2011})$ takie, że $x_1 = 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 2x_1, 0 \leqslant x_3 \leqslant 2x_2, \ldots, 0 \leqslant x_{2011} \leqslant 2x_{2010}$. Powiedz, dla którego z tych ciągów wartość wyrażenia ... jest największa."

   Niestety w międzyczasie Yogi starł tablicę i Seba zdążył tylko zapamiętać, że zamiast "..." było wyrażenie postaci $\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_{2010} + x_{2011}$.

   Udowodnij, że wciąż może on rozwiązać zadanie tj. wskazać ciąg, dla którego wyrażenie napisane na tablicy miało największą wartość.

3. Środki okręgów o_1, o_2, o_3 leżą na jednej prostej. Okręgi o_2 i o_3 są styczne zewnętrznie w punkcie B, zaś okrąg o_1 jest do o_2, o_3 styczny wewnętrznie. Cięciwa UW okręgu o_1 przechodzi przez B i przecina o_2 jeszcze w punkcie S, a o_3 jeszcze w punkcie T. Wykaż, że $US = TW$.

4. Udowodnij, że nie istnieje taka liczba wymierna r, że liczby $2r^2 + 1, 2r^2 - 1$ są kwadratami liczb wymiernych.