Dzień drugi

Grupa olimpijska.

1) Udowodnij, że dla $a,b,c>0$ jest $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.
2) Rozstrzygnij, czy dla dowolnych $a,b>0$ jest $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab} \leq a+b$.
3) Rozstrzygnij, czy istnieje takie x, że $(ax)^2+\ a+b\ \ x+\frac{b}{a}<0$.
4) Udowodnij, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ dla n całkowitego i większego od 1.
5) Udowodnij, że dla $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ rzeczywistych zachodzi
   $$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ \ (b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq \ a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ ^2.$$
6) Udowodnij, że jeżeli $a,b,c>0$ i $a+b+c=2$, to $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \leq 2$.

Dzień drugi

Grupa olimpijska.

7) Udowodnij, że dla $a,b,c>0$ jest $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.
8) Rozstrzygnij, czy dla dowolnych $a,b>0$ jest $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab} \leq a+b$.
9) Rozstrzygnij, czy istnieje takie x, że $(ax)^2+\ a+b\ \ x+\frac{b}{a}<0$.
10) Udowodnij, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ dla n całkowitego i większego od 1.
11) Udowodnij, że dla $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ rzeczywistych zachodzi
    $$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ \ (b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq \ a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\ ^2.$$
12) Udowodnij, że jeżeli $a,b,c>0$ i $a+b+c=2$, to $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) \leq 2$.