Joachim Jelisiejew
Aleksandra Baranowska   **Mateusz Jocz**

I Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza
w Białymstoku
Podlaskie Stowarzyszenie na Rzecz Uzdolnionych

I Obóz Naukowy ILO CAMP

Część matematyczna

Kadra matematyczna:
Aleksandra Baranowska
Iwona Bujnowska
Joachim Jelisiejew (koordynator)
Mateusz Jocz

Główni organizatorzy:
Iwona Bujnowska
Ireneusz Bujnowski
Joachim Jelisiejew
Jacek Tomasiewicz

Serwy, 25 września — 1 października 2011
(wydanie pierwsze)

Spis treści

Część I

Grupa średnio zaawansowana

Rozdział 1

Zadania

1.1 Dzień I

Zadanie ŚR 1.1

Z cyfr $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Podaj sumę tych liczb. Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie ŚR 1.2

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność

$$1^1 + 2^2 + \ldots + n^n < (n+1)^{n+1}.$$

Zadanie ŚR 1.3

Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$x + 2y + 3xy = 5.$$

1.2 Dzień II

Zadanie ŚR 2.1

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt O jest punktem przecięcia przekątnych. Wiedząc, że pola trójkątów AOB i COD są odpowiednio równe p^2 i q^2, oblicz pole tego trapezu.

Zadanie ŚR 2.2

Znajdź wszystkie czwórki liczb całkowitych nieujemnych $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$ spełniające równanie

$$x! + y! + z! = t!.$$

Zadanie ŚR 2.3

Wyznacz wszystkie naturalne n takie, że liczby od 1 do n^2+n można ustawić w tablicy $n\times(n+1)$ w ten sposób, by równe były sumy liczb w każdym wierszu i równe były sumy liczb w każdej kolumnie.

1.3 Dzień III

Zadanie ŚR 3.1

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Wykaż, że dla dowolnego punktu K leżącego na podstawie BC tego trójkąta zachodzi równość

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |BK| \cdot |CK|.$$

Zadanie ŚR 3.2

Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że

$$\frac{n^3+3}{n^2+7}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie ŚR 3.3

Znajdź wszystkie rozwiązania równania $2^a+1 = b^2$ w liczbach całkowitych nieujemnych a, b.

1.4 Dzień V

Zadanie ŚR 5.1

Mamy 20 worków i 20 kotów. Dla każdego worka i każdego kota ustalamy cenę, przy czym worek może kosztować od 2 zł 10 gr do 4 zł, kot od 10 zł do 12 zł, a ceny są wielokrotnościami 1 gr. Czy można tak ustalić ceny worków i kotów, żeby każdy zestaw kot+worek był w innej cenie?

Zadanie ŚR 5.2

Wybrano 17 liczb całkowitych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Uzasadnij, że istnieją wśród nich dwie, które nie są względnie pierwsze.

Zadanie ŚR 5.3

Punkt P leży wewnątrz okręgu opisanego na $\triangle ABC$, po tej samej stronie odcinka BC co A. Wykaż, że miara kąta $\sphericalangle BPC$ jest większa od miary $\sphericalangle BAC$.

1.5 Mecz matematyczny

Zadanie ŚR M.1

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (m, n) takich, że $4 \cdot (mn + 1)$ jest podzielne przez $(m + n)^2$.

Zadanie ŚR M.2

Znajdź wszystkie trójki (a, b, p) takie, że a, b, p są całkowite dodatnie, p jest pierwsze i zachodzi

$$2^a + p^b = 19^a.$$

Zadanie ŚR M.3

W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie kąty mają tę samą miarę. Wykaż, że

$$AB + BC = DE + EF.$$

Zadanie ŚR M.4

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} xy + z = t \\ yz + t = x + 1 \\ zt + x = y + 2 \\ tx + y = z - 3 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z, t.

Zadanie ŚR M.5

Smok ma 1000 głów. Jogi może zadawać cztery rodzaje cięć mieczem: przy pierwszym rodzaju Jogi ścina smokowi dokładnie 33 głowy, ale 48 nowych odrasta, przy drugim rodzaju Jogi ścina dokładnie 21 głów i żadna nie odrasta, przy trzecim Jogi ścina dokładnie 17 głów, a odrasta 14, a przy czwartym Jogi ścina dokładnie jedną głowę, na miejscu której odrasta aż 349 nowych. Smok zostanie zabity, gdy w wyniku walki nie będzie miał żadnej głowy (i żadna głowa nie odrośnie). Czy Jogi może zabić smoka?

Zadanie ŚR M.6

Niech a będzie liczbą rzeczywistą dodatnią. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$x_1^2 + (a - x_1)^2 + x_2^2 + (a - x_2)^2 + \ldots + x_{2011}^2 + (a - x_{2011})^2 = 2011 \cdot a^2$$

w liczbach rzeczywistych $x_1, \ldots, x_{2011}$ takich, że $0 \leqslant x_i \leqslant a$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2011$.

Zadanie ŚR M.7

1. Dowiedź, że krawędzi sześcianu nie da się tak ponumerować liczbami od 1 do 12, by suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka była taka sama.

2. Czy można spełnić powyższy warunek, numerując krawędzie dwunastoma różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 13\}$?

Zadanie ŚR M.8

Czy w nieskończonym ciągu arytmetycznym postaci $a \cdot n + b,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ gdzie a, b są całkowite dodatnie:

1. Musi istnieć wyraz będący potęgą liczby naturalnej?

2. Może istnieć nieskończenie wiele wyrazów będących potęgami liczb naturalnych?

Uznajemy, że potęga musi mieć podstawę i wykładnik większe niż 1.

Zadanie ŚR M.9

Niech S_1 będzie półokręgiem o środku O i średnicy AB. Okrąg C_1 o środku P jest styczny do S_1 i styczny do AB w O. Okrąg C_2 jest taki, że jego środek, Q, leży na AB i C_2 jest styczny do S_1, C_1. Punkt R jest taki, że $OPRQ$ jest prostokątem. Uzasadnij, że istnieje okrąg o środku R styczny do S_1, C_1, C_2.

Zadanie ŚR M.10

Kwadrat o boku długości 1 pokryto m^2 prostokątami. Dowiedź, że obwód pewnego z tych prostokątów jest większy lub równy $\frac{4}{m}$.

1.6 Trudniejsze

Zadanie ŚR T.1

Udowodnij, że dla wszystkich całkowitych dodatnich n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}.$$

Zadanie ŚR T.2

Rozstrzygnij, czy wśród liczb całkowitych nieujemnych podzielnych przez 4 i mniejszych od 10^{2011} jest więcej liczb zawierających czy niezawierających 1 w zapisie dziesiętnym.

Zadanie ŚR T.3

Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem równobocznym o polu 1, zaś P punktem w jego wnętrzu. Przez D, E, F oznaczamy rzuty prostokątne P odpowiednio na BC, CA, AB. Znajdź najmniejszą możliwą sumę pól trójkątów $\triangle BDP, \triangle CEP, \triangle FAP$.

Zadanie ŚR T.4

Znajdź wszystkie liczby dodatnie x, y spełniające układ równań

$$\begin{cases} x^{x+2y} = y^{y-2x} \\ xy = 1 \end{cases}.$$

Rozdział 2

Rozwiązania

2.1 Dzień I

Rozwiązanie ŚR 1.1

Zapiszmy każdą liczbę $\overline{abcd}$ z sumy jako $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$.

Ile razy pojawi się w tak zapisanej sumie składnik $1000 \cdot 1$? Za b możemy wziąć dowolną cyfrę nierówną 1, więc b możemy wybrać na 8 sposobów. Cyfry c, d możemy wybrać na 7 i 6 sposobów odpowiednio, więc składnik $1000 \cdot 1$ pojawi się w sumie $8 \cdot 7 \cdot 6$ razy.

Składnik $1000 \cdot 1$ nie jest w żaden sposób wyjątkowy — każdy składnik postaci $10^k \cdot x$ znajdzie się w sumie $8 \cdot 7 \cdot 6$ razy. Całkowita suma wynosi więc

$$\begin{aligned} &(1000 \cdot 1 + 1000 \cdot 2 + \ldots + 1000 \cdot 9 + 100 \cdot 1 + \ldots + 100 \cdot 9 + \\ &+ 10 \cdot 1 + \ldots + 10 \cdot 9 + 1 + \ldots + 9) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \\ &(1000 + 100 + 10 + 1) \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \\ &(1 + 2 + \ldots + 9) \cdot 1111 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 16798320. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ŚR 1.2

Udowodnijmy powyższą nierówność za pomocą indukcji. Dla $n = 1$ nierówność zachodzi, gdyż $1^1 < 2^2$. Załóżmy teraz, że nierówność jest spełniona dla n i dowiedźmy jej prawdziwości dla $n + 1$.

$1^1 + 2^2 + \ldots + n^n + (n+1)^{n+1} < (n+1)^{n+1} + (n+1)^{n+1} = 2 \cdot (n+1)^{n+1} < 2 \cdot (n+2)^{n+1} <$

$$< (n+2) \cdot (n+2)^{n+1} = (n+2)^{n+2}.$$

Nierówność jest zatem spełniona dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$.

Rozwiązanie ŚR 1.2 II

Istnieje również rozwiązanie nie używające indukcji:

$$1^1 + 2^2 + \ldots + n^n \leqslant 1^n + 2^n + \ldots + n^n \leqslant n^n + n^n + \ldots + n^n = n \cdot n^n = n^{n+1} < (n+1)^{n+1}.$$

Rozwiązanie ŚR 1.3

Zauważmy, że

$$5 = 3xy + 2y + x = (3x+2)\left(y + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}, \text{ więc } (3x+2)\cdot(3y+1) = 17.$$

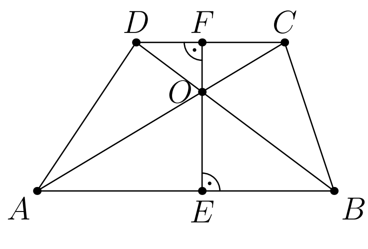
Liczba 17 jest pierwsza, więc istnieją cztery możliwości:

1. $3x + 2 = 17$ i $3y + 1 = 1$, skąd $(x, y) = (5, 0)$,
2. $3x + 2 = 1$ i $3y + 1 = 17$, skąd $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$,
3. $3x + 2 = -17$ i $3y + 1 = -1$, skąd $(x, y) = \left(-\frac{19}{3}, -\frac{2}{3}\right)$,
4. $3x + 2 = -1$ i $3y + 1 = -17$, skąd $(x, y) = (-1, -6)$.

Jedynymi rozwiązaniami są zatem pary $(5, 0)$ i $(-1, -6)$.

2.2 Dzień II

Rozwiązanie ŚR 2.1



Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.
Kąty naprzemianległe są równe, więc $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$, stąd na mocy cechy podobieństwa (k, k, k) trójkąt $\triangle ABO$ jest podobny do $\triangle CDO$. Skala podobieństwa wynosi $\sqrt{p^2/q^2} = p/q$.

Korzystając z powyższego obliczamy

$$[AOD] = \frac{[AOD]}{[COD]} \cdot [COD] = \frac{AO}{CO} \cdot q^2 = \frac{p}{q} \cdot q^2 = pq.$$

Analogicznie $[COB] = pq$. Tak więc

$$[ABCD] = [AOB] + [BOC] + [COD] + [DOA] = q^2 + pq + p^2 + pq = (p+q)^2.$$

Rozwiązanie ŚR 2.2

Przypomnijmy, że $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1$ i ogólnie $n! = n \cdot (n-1)!$.
Skoro $x!, y! > 0$, to $z! < t!$, więc $z < t$, czyli $z! \leqslant (t-1)!$. Skoro $x, y \leqslant z$, to

$$t! = x! + y! + z! \leqslant 3z! \leqslant 3(t-1)! \text{ więc } t \leqslant 3.$$

Z drugiej strony $t! = x! + y! + z! \geqslant 1 + 1 + 1 > 2!$, więc $t > 2$. Łącznie $t = 3$, więc $t! = x! + y! + z! \leqslant 2! + 2! + 2! = 6 = t!$. Musi zajść równość, więc istnieje tylko jedno rozwiązanie: $(2, 2, 2, 3)$.

Rozwiązanie ŚR 2.3

Załóżmy, że istnieje n spełniające warunki zadania. Niech S będzie sumą liczb w tablicy. Wtedy S jest również sumą liczb od 1 do $n^2 + n$, więc $S = \frac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}$.
Skoro w tablicy równe są sumy liczb w wierszach oraz sumy liczb w kolumnach, to S dzieli się zarówno przez n, jak i przez $n + 1$. Liczby te są względnie pierwsze, zatem $(n^2 + n)\Big|\frac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}$. Tymczasem

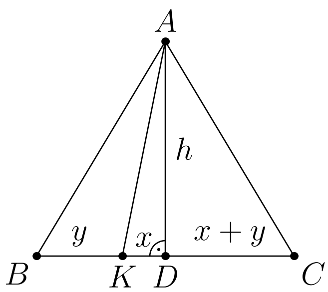
$$\frac{(n^2 + n)(n^2 + n + 1)}{2(n^2 + n)} = \frac{n^2 + n + 1}{2} \notin \mathbb{Z},$$

gdyż $n^2 + n + 1$ jest nieparzyste dla każdego n. Sprzeczność pokazuje, że żądane n nie istnieje.

2.3 Dzień III

Rozwiązanie ŚR 3.1

Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A.
Skoro $\triangle ABC$ jest równoramienny, to, ewentualnie zamieniając oznaczenia wierzchołków B i C, co nie zmienia tezy, możemy założyć, że K leży na odcinku BD.
Oznaczmy długości odcinków AD, DK, KB jako h, x, y odpowiednio. Wtedy $|CD| = |BD| = x + y$. Z twierdzenia Pitagorasa wynikają równości



$$|AB|^2 = h^2 + (x + y)^2 = (h^2 + x^2) + 2xy + y^2 =$$
$$|AK|^2 + y(2x + y) = |AK|^2 + |BK| \cdot |CK|.$$

Uwaga: Teza zadania jest również (bardzo) szczególnym przypadkiem twierdzenia Stewarda.

Rozwiązanie ŚR 3.2

Zauważmy, że $n^3 + 3 = \Big((n^2 + 7) - 7\Big) \cdot n + 3$, stąd $\frac{n^3+3}{n^2+7} = n + \frac{-7n+3}{n^2+7}$. Ułamek $\frac{-7n+3}{n^2+7}$ jest ujemny, więc jeżeli jest on liczbą całkowitą, to jest nie większy od -1:

$$-7n + 3 \leqslant (-1) \cdot (n^2 + 7), \text{ czyli } 7n - 3 \geqslant n^2 + 7 \text{ więc } 0 \geqslant n^2 - 7n + 10 = (n - 2) \cdot (n - 5).$$

Może się to zdarzyć tylko, gdy $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Sprawdzamy te cztery możliwości i stwierdzamy, że ułamek z zadania jest liczbą całkowitą dla $n = 2$ lub $n = 5$.

Rozwiązanie ŚR 3.3

Zauważmy, że $2^a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1)$, więc liczby $b-1, b+1$ są potęgami dwójki jako dzielniki 2^a.

Zauważmy, że $b = 0, 1, 2$ implikuje sprzeczność, więc $b \geqslant 3$, czyli $b + 1 \geqslant 4$. Liczba $b + 1$ jest potęgą dwójki nie mniejszą od 4, więc jest podzielna przez 4: $b + 1 = 4k$. Tym samym $b - 1 = 4k - 2$ jest potęgą dwójki niepodzielną przez 4 i $b - 1 \geqslant 2$, więc $b - 1 = 2$, $b = 3$, $a = 3$. Otrzymujemy jedyne rozwiązanie: $(a, b) = (3, 3)$.

2.4 Dzień V

Rozwiązanie ŚR 5.1

Zauważmy, że cena za zestaw kot+worek jest z przedziału od 12 zł 10 gr do 16 zł. Możliwych cen jest zatem $1600 - 1210 + 1 = 391$, natomiast samych zestawów kot+worek mamy na sprzedaż $20 \cdot 20 = 400$. Jest więcej zestawów niż możliwych cen, więc pewne dwa zestawy mają taką samą cenę.

Rozwiązanie ŚR 5.2

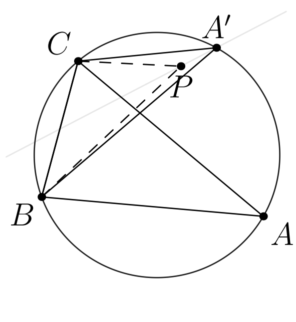
Obliczamy, że w zbiorze $A = \{1, 2, \ldots, 50\}$ jest 15 liczb pierwszych:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Zauważmy, że liczby a, b nie są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólny dzielnik pierwszy.

Każda liczba ze zbioru A oprócz liczby 1 dzieli się przez pewien dzielnik pierwszy. Możliwych dzielników pierwszych jest 15, a liczb w wybranym podzbiorze A różnych od 1 jest co najmniej 16, więc pewne dwie liczby dzielą się przez ten sam dzielnik pierwszy.

Rozwiązanie ŚR 5.3



Niech A' będzie dowolnym punktem okręgu opisanego takim, że P leży wewnątrz $\triangle A'BC$ (przykładowo A' może być punktem przecięcia okręgu i prostej przechodzącej przez P i środek odcinka BC, jak na rysunku). Wtedy

$$\sphericalangle BPC = 180^\circ - \sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB >$$

$$> 180^\circ - \sphericalangle A'BC - \sphericalangle A'CB = \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC.$$

2.5 Mecz matematyczny

Rozwiązanie ŚR M.1

Teza z podzielności nie zmieni się, jeżeli zamienimy n, m miejscami, więc możemy (ew. zamieniając) założyć $m \geqslant n$.

Skoro $(m+n)^2 \big| 4 \cdot (mn+1)$ i obie te liczby są dodatnie, to $(m+n)^2 \leqslant 4 \cdot (mn+1)$, po przekształceniu

$$(m-n)^2 \leqslant 4.$$

Skoro $m \geqslant n$ to $m-n \geqslant 0$ więc możemy wyciągnąć pierwiastek z poprzedniej nierówności otrzymując $0 \leqslant m-n \leqslant 2$. Rozważamy powstałe trzy przypadki:

1. $m-n=0$, czyli $m=n$.

   W tym przypadku podzielność przybiera postać $4 \cdot n^2 \big| 4 \cdot (n^2+1)$, czyli $n^2 \big| n^2+1, n^2 \big| 1$. Otrzymujemy jedyne rozwiązanie $m=n=1$.

2. $m-n=1, m=n+1$.

   Po podstawieniu do podzielności z zadania otrzymujemy

   $$(2n+1)^2 \big| 4 \cdot (n(n+1)+1) \text{ stąd } (2n+1)^2 \big| n(n+1)+1.$$

   Ale $(2n+1)^2 > n(n+1)+1 > 0$, więc otrzymujemy sprzeczność.

3. $m-n=2, m=n+2$. W tym przypadku $(m+n)^2 = (n+2+n)^2 = (2 \cdot (n+1))^2 = 4 \cdot (n+1)^2 = 4 \cdot (nm+1)$, więc oczywiście $(m+n)^2 \big| 4 \cdot (nm+1)$ dla każdego n.

Pozostaje spisać, kiedy zachodzi podzielność, pamiętając o dodatkowym założeniu $m \geqslant n$: Podzielność z zadania zachodzi, gdy $m=n=1$ lub $m=n-2$ lub $n=m-2$.

Rozwiązanie ŚR M.2

Skoro $17 \big| 19-2$ to $17 \big| 19^a - 2^a = p^b$, zatem $p=17$. Popatrzmy na równość $\mod 9$:

$$2^a + (-1)^b \equiv 1 \mod 9.$$

oczywiście $2^a \not\equiv 0$, więc $2^a \equiv 2 \mod 9$, stąd $a \equiv 1 \mod 6$, w szczególności a jest nieparzyste: $a = 2k+1$.

Załóżmy, że $a > 1$. Przepiszmy równość w postaci

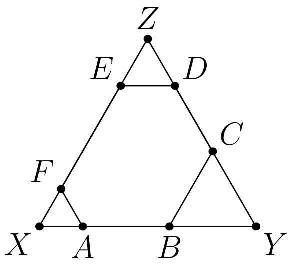
$$17^b = 19^a - 2^a = (19-2)\left(19^{a-1} + 19^{a-2} \cdot 2 + \ldots + 2^{a-1}\right),$$
$$\text{czyli } 17^{b-1} = 19^{a-1} + 19^{a-2} \cdot 2 + \ldots + 2^{a-1}$$

i rozważmy tę równość $\mod 4$:

$$1 \equiv 3^{a-1} + 3^{a-2} \cdot 2 = 3^{2k} + 3^{2k-1} \cdot 2 \equiv (-1)^{2k} + (-1)^{2k-1} \cdot 2 \equiv 3 \mod 4.$$

Sprzeczność. Musi być więc $a=1$ i jedyne rozwiązanie to $a=b=1, p=17$.

Rozwiązanie ŚR M.3



Każdy z kątów danego sześciokąta ma miarę $\frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$. Skoro $\sphericalangle EFA + \sphericalangle FAB = 240^\circ > 180^\circ$ to EF i AB przecinają się w pewnym punkcie X, który leży po przeciwnej stronie FA niż sześciokąt. Analogicznie pary prostych AB i CD oraz CD i EF przecinają się w punktach Y i Z, które leżą po przeciwnej stronie prostych odpowiednio BC i DE niż sześciokąt.

Skoro $\sphericalangle XFA = 180^\circ - \sphericalangle EFA = 60^\circ$ i $\sphericalangle XAF = 180^\circ - \sphericalangle FAB = 60^\circ$, to $\sphericalangle FXA = 180^\circ - \sphericalangle XFA - \sphericalangle XAF = 60^\circ$. Podobnie dowodzimy, że wszystkie kąty w trójkątach $\triangle BYC, \triangle DZE$ mają po 60°. Wynika stąd, że trójkąty $\triangle FXA, \triangle BYC, \triangle DZE$ oraz trójkąt $\triangle XYZ$ są równoboczne. Obliczamy

$$AB + BC = AB + BY = AY = XY - XA = ZX - FX = ZF = ZE + EF = DE + EF.$$

Rozwiązanie ŚR M.4

Dodając równania stronami, otrzymamy $xy + yz + zt + tx = 0$, równoważnie $(x + z)(y + t) = 0$. Wynika stąd, że $z = -x$ lub $t = -y$. Rozpatrzmy oba te przypadki:

1. $z = -x$.

   Podstawiając do pierwszego i drugiego równania, otrzymamy układ

   $$\begin{cases} xy - x = t \\ -xy + t = x + 1, \end{cases}$$

   co po zsumowaniu stronami da nam $2x = -1$, $x = -1/2$, $z = 1/2$. Podstawiając to do drugiego i trzeciego równania, otrzymamy $y = -9/5$, $t = 7/5$. Sprawdzamy, że ta czwórka spełnia wszystkie równania wyjściowego układu.

2. $t = -y$.

   Podstawiając do pierwszego i czwartego równania, otrzymamy

   $$\begin{cases} xy + z = -y \\ -xy + y = z - 3. \end{cases}$$

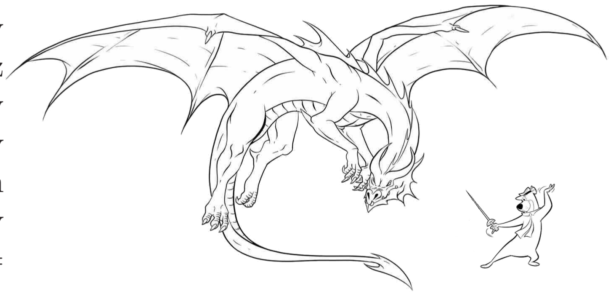
   Dodając stronami i dzieląc przez 2, otrzymamy $y = -3/2$, $t = 3/2$. Podstawiając to do pierwszego i drugiego równania, otrzymamy $x = -7/13$, $z = 9/13$. Ta czwórka również spełnia wyjściowe równania.

Istnieją dwa rozwiązania układu:

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{5}\right) \text{ oraz } \left(-\frac{7}{13}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{13}, \frac{3}{2}\right).$$

Rozwiązanie ŚR M.5

Zwróćmy uwagę, że niezależnie od rodzaju cięcia zadanego przez Jogiego liczba głów smoka zmienia się o liczbę podzielną przez 3. Przy pierwszym rodzaju cięcia liczba głów smoka wzrasta o $48 - 33 = 15 = 3 \cdot 5$, przy drugim maleje o $21 = 3 \cdot 7$, przy trzecim zmniejsza się o $17 - 14 = 3 = 3 \cdot 1$, a przy czwartym zwiększa się o $349 - 1 = 348 = 3 \cdot 116$.



Wynika stąd, że w wyniku zadawanych przez Jogiego ciosów nie zmienia się reszta z dzielenia liczby głów smoka przez 3.

Równość $1000 = 3 \cdot 333 + 1$ pokazuje, że przed walką liczba głów smoka dawała resztę 1 z dzielenia przez 3. Z naszego rozumowania wynika, że pomimo zmagań Jogiego, reszta ta nie ulegnie zmianie. Zatem Jogi nie może zabić smoka, gdyż wówczas smok nie miałby żadnej głowy, czyli reszta z dzielenia liczby głów smoka przez 3 wyniosłaby 0.

Rozwiązanie ŚR M.6

Zauważmy, że $x_i^2 + (a - x_i)^2 = a^2 + 2x_i^2 - 2ax_i = a^2 + 2x_i(x_i - a) \leqslant a^2$, przy czym równość zachodzi, gdy $2x_i(x_i - a) = 0$, czyli gdy $x_i = 0$ lub $x_i = a$.

Sumując nierówności $x_i^2 + (a - x_i)^2 \leqslant a^2$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2011$, stwierdzamy, że

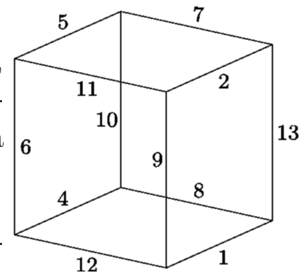
$$x_1^2 + (a - x_1)^2 + x_2^2 + (a - x_2)^2 + \ldots + x_{2011}^2 + (a - x_{2011})^2 \leqslant 2011 \cdot a^2$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy każde z x_i ma wartość a lub 0. Tak więc rozwiązaniami równania z zadania są wszystkie takie ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_{2011})$, że $x_i \in \{0, a\}$ dla wszystkich i.

Rozwiązanie ŚR M.7

1. Załóżmy, że żądane numerowanie istnieje.

   Każda z krawędzi sześcianu przylega do dwóch wierzchołków, zatem podwojona suma wszystkich liczb powinna być podzielna przez ilość wierzchołków — 8. Tymczasem podwojona suma jest równa $2 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} = 12 \cdot 13$. Sprzeczność.



2. Przy wyborze liczb ze zbioru $1, 2, \ldots, 13$ istnieje wiele możliwych numerowań. Przykład na rysunku.

Kluczem do szybkiego skonstruowania numerowania jest założenie, jaka ma być suma w wierzchołku. Suma ta musi być równa $(13 \cdot 14 - 2 \cdot a)/8$, *gdzie* $a \in \{1, 2, \ldots, 13\}$, *może być więc równa* 22, *jeżeli odrzucimy* 3, 21 *jeżeli odrzucimy* 7 *itd.*

Rozwiązanie ŚR M.8

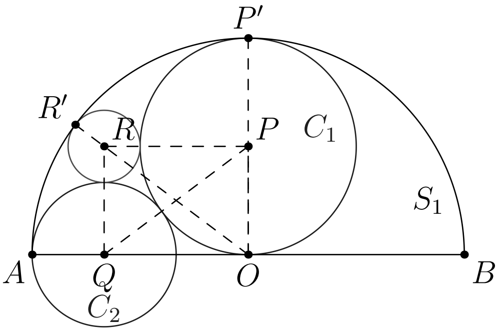
1. Nie. Weźmy $a = 9, b = 3$, innymi słowy wyrazy ciągu są postaci $9n + 3$. Załóżmy, że pewien wyraz, $9n_0 + 3$, jest potęgą s^m, gdzie liczby s, m, n_0 są całkowite dodatnie, $s, m \geqslant 2$.

Skoro $3(3n_0+1) = 9n_0+3 = s^m$, to $3\big|s^m$, więc $3\big|s$, więc $3^m\big|s^m$, a że $m \geqslant 2$ to $9\big|s^m$. Skoro tak, to $9\big|9n_0+3$, czyli $9\big|3$. Sprzeczność.

2. Tak. Przykładem jest ciąg $1 \cdot n + 1$, czyli ciąg liczb całkowitych większych od 1.

Rozwiązanie ŚR M.9

Korzystać będziemy wielokrotnie z następującego faktu: jeżeli okręgi są styczne, to ich środki oraz punkt styczności leżą na jednej prostej. Aby udowodnić tezę, trzeba pokazać, że odległości punktu R od S_1, C_1, C_2 są równe. Pokażemy najpierw, że odległości R od C_1 i C_2 są równe. Niech P', R' oznaczają punkty przecięcia OP, OR z S_1 odpowiednio.



Oznaczmy przez r odległość R od C_1, a przez c_1, c_2 — promienie C_1, C_2.

Z definicji $r = RP - c_1 = QO - c_1$, gdyż $OPRQ$ jest prostokątem.

Ale $QO + c_2 = QO + AQ = AO = P'O = 2 \cdot c_1$, więc $QO = 2 \cdot c_1 - c_2$, stąd $r = 2 \cdot c_1 - c_2 - c_1 = c_1 - c_2$, więc $r + c_2 = c_1 = PO = RQ$, a więc odległość R od C_2 to również r.

Odległość R od S_1 to $RR' = R'O - RO$. Przekątne prostokąta są równe, więc $RO = PQ = c_1 + c_2$. Ponadto $R'O = P'O = 2 \cdot c_1$, więc $RR' = R'O - RO = 2 \cdot c_1 - (c_1 + c_2) = c_1 - c_2 = r$. To kończy dowód.

Rozwiązanie ŚR M.10

Załóżmy, że prostokąt z tezy nie istnieje, a więc obwód każdego z prostokątów jest mniejszy niż $\frac{4}{m}$.

Oszacujmy pole prostokąta w zależności od obwodu. Jeżeli prostokąt P ma boki a, b, czyli obwód $o = 2a + 2b$, to jego pole szacuje się

$$ab \leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{16}\left(2a+2b\right)^2 = \frac{1}{16}o^2.$$

Z założenia wszystkie prostokąty mają odwody mniejsze od $4m^{-1}$, a więc pola mniejsze od $\frac{1}{16}\left(\frac{4}{m}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$. Suma pól wszystkich prostokątów jest więc mniejsza niż $m^2 \cdot \frac{1}{m^2} = 1$, a więc mniejsza od pola kwadratu o boku 1, co przeczy warunkom zadania. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że istnieje co najmniej jeden prostokąt o obwodzie większym lub równym $\frac{4}{m}$.

2.6 Trudniejsze

Rozwiązanie ŚR T.1

Zauważmy, że dla $n = 1$ nierówność jest prawdziwa. W dalszej części rozwiązania zakładamy $n \geqslant 2$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant \frac{4n+2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{n+1}.$$

Przez indukcję udowodnimy że

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$$

i tym samym dowiedziemy żądanej nierówności, gdyż składnik $\frac{1}{n}$ jest dodatni dla $n \in \mathbb{N}_+$.

Sprawdzamy warunek bazowy dla $n = 2$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \geqslant \frac{7}{12}$.

Załóżmy, że dla pewnego k zachodzi nierówność

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geqslant \frac{7}{12}.$$

Pokażemy, że zachodzi ona również dla $k+1$:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \geqslant \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k+1} \geqslant \frac{7}{12},$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z udowodnionej wcześniej nierówności $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \geqslant \frac{1}{k+1}$, a druga z założenia indukcyjnego.

Tym samym, na mocy zasady indukcji matematycznej, udowodniliśmy $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$ dla $n \geqslant 2$, co kończy dowód zadania.

Rozwiązanie ŚR T.2

Liczby całkowite nieujemne i mniejsze od 10^{2011} możemy interpretować jako liczby złożone dokładnie z 2010 cyfr (być może z zerami z przodu), dla uproszczenia nazwijmy te liczby *małymi.*

Liczba całkowita nieujemna jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy jej dwie ostatnie cyfry należą do zbioru $\{00, 04, 08, 12, \ldots, 96\}$.

Aby otrzymać *małą* liczbę podzielną przez 4 wybieramy na 10^{2008} sposobów pierwszych 2008 cyfr i na 25 sposobów końcówkę, zatem *małych* liczb podzielnych przez 4 jest $25 \cdot 10^{2008}$.

Liczb *małych* niezawierających 1 w swoim zapisie jest 9^{2010} (liczymy tutaj również niepodzielne przez 4). Jeżeli więc $9^{2010} < \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 10^{2008}$ to więcej jest liczb z jedynką w zapisie.

Nierówność $9^{2010} < \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 10^{2008}$ jest równoważna $\left(\frac{9}{10}\right)^{2010} < \frac{1}{8}$. Cierpliwe obliczenia pokazują, że $\left(\frac{9}{10}\right)^{7} < \frac{1}{2}$, zatem $\left(\frac{9}{10}\right)^{21} < \frac{1}{8}$ i tym bardziej $\left(\frac{9}{10}\right)^{2010} < \frac{1}{8}$.

Powyższe rozumowanie dowodzi, że liczb zawierających 1 jest (wielokrotnie) więcej niż tych niezawierających 1.

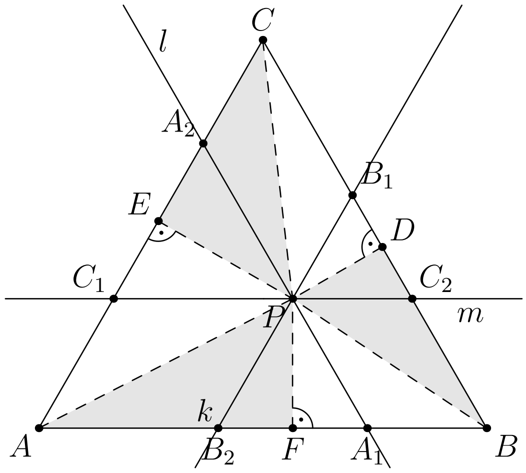
Rozwiązanie ŚR T.3

Pole figury $\mathcal{F}$ oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$. Wykażemy, że $[BDP] + [CEP] + [AFP] = \frac{1}{2}[ABC]$.

Przez punkt P poprowadźmy proste: k, l, m równoległe odpowiednio do boków AC, BC, AB. Niech l przecina AB i AC odpowiednio w A_1 i A_2, k przecina BC i AB odpowiednio w B_1 i B_2 oraz niech m przecina AC i BC odpowiednio w C_1 i C_2.

Trójkąt B_2A_1P jest równoboczny, gdyż $\sphericalangle PB_2A_1 = \sphericalangle CAB = 60°$ i $\sphericalangle PA_1B_2 = \sphericalangle CBA = 60°$. Analogicznie trójkąty C_2B_1P, A_2C_1P są równoboczne. Figury $AB_2PC_1, BC_2PA_1, CA_2PB_1$ są równoległobokami.

Wysokość w trójkącie równobocznym oraz przekątna w równoległoboku dzielą wymienione figury na dwie figury przystające (więc o równych polach), stąd



$$[BDP] = [BC_2P] + [C_2DP] = \frac{1}{2}[BC_2PA_1] + \frac{1}{2}[C_2B_1P] = \frac{1}{2}[BB_1PA_1].$$

Analogicznie dowodzimy, że $[CEP] = \frac{1}{2}[CC_1PB_1]$ i $[AFP] = \frac{1}{2}[AA_1PC_1]$. Łącznie

$$[BDP] + [CEP] + [AFP] = \frac{1}{2}\left([BB_1PA_1] + [CC_1PB_1] + [AA_1PC_1]\right) = \frac{1}{2}[ABC] = \frac{1}{2}.$$

Suma $[BDP] + [CEP] + [AFP]$ jest więc niezależna od wyboru punktu P i wynosi $\frac{1}{2}$. W szczególności jest to najmniejsza możliwa wartość.

Rozwiązanie ŚR T.4

Z drugiego równania wynika, że $x \neq 0$. Wyznaczamy z niego $y = \frac{1}{x}$ i podstawiamy do pierwszego równania, otrzymując

$$x^{x+\frac{2}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}-2x}, \text{ czyli}$$

$$x^{x+\frac{2}{x}} = x^{2x-\frac{1}{x}}.$$

Wynika stąd, że $x = 1$ lub $x + \frac{2}{x} = 2x - \frac{1}{x}$.

Załóżmy $x + \frac{2}{x} = 2x - \frac{1}{x}$, czyli $x - \frac{3}{x} = 0$. Zmienna x jest dodatnia; mnożąc przez x otrzymujemy $x^2 - 3 = 0$, czyli $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3} < 0$.

Istnieją zatem dwa możliwe rozwiązania: $(1, 1)$ lub $(\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, bezpośrednio sprawdzamy, że te pary są istotnie rozwiązaniami wyjściowego układu.

Rozdział 3

Wykłady

3.1 Algorytm Euklidesa

Zapis $a \mod n$ oznacza "reszta z dzielenia a przez n".

Definicja 1 (Największy wspólny dzielnik)**.** *Największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a, b (zakładamy $a \neq 0$ lub $b \neq 0$) to największa liczba całkowita d taka, że $d \big| a$ i $d \big| b$.*

Oznaczamy to $d = NWD(a, b)$.

Zauważmy, że $NWD(a, b) = NWD(-a, b) = NWD(a, -b) = NWD(-a, -b)$, więc zawsze obliczając NWD będziemy zakładać, że $a, b \geqslant 0$.

Definicja 2 (Liczby względnie pierwsze)**.** *Jeżeli $NWD(a, b) = 1$, to liczby a i b nazywamy* względnie pierwszymi.

3.1.1 Podstawowy algorytm.

Niech a, b będą liczbami całkowitymi nieujemnymi, przy czym $a \neq 0$ lub $b \neq 0$.

Największy wspólny dzielnik ma znaczenie, dzięki obserwacji:

Obserwacja 3. *$NWD(a, b) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \big| b$.*

Zaskakujące, ale czasami prościej obliczyć $NWD(a, b)$ i porównać to z a niż obliczyć, czy $a \big| b$.

Przy obliczeniu $NWD(a, b)$ przydają się jeszcze dwie obserwacje:

Obserwacja 4. *$NWD(a, b) = NWD(a - kb, b)$ dla każdego k całkowitego.*

Dowód. Jeżeli $d \big| a$ i $d \big| b$, to $d \big| a - kb$. Jeżeli $d \big| a - kb$ i $d \big| b$, to $d \big| kb$ i $d \big| (a - kb) + kb = a$.

Te same liczby dzielą a i b oraz $a - kb$ i b, więc największe z tych liczb są równe. $\square$

Obserwacja 5. *Jeżeli liczby b i c są względnie pierwsze, to $NWD(c \cdot a, b) = NWD(a, b)$.*

Do obliczenia $NWD(a, b)$ możemy więc zastosować następujący algorytm rekurencyjny:

1. Załóżmy $a \geqslant b$,

2. Jeżeli $a \neq 0$ to $NWD(a, b) := NWD(a - b, b)$,

3. a jeżeli $a = 0$, to $NWD(a, b) := b$.

Przykładowo: $NWD(7, 2) = NWD(5, 2) = NWD(3, 2) = NWD(1, 2) = NWD(2, 1) = NWD(1, 1) = NWD(0, 1) = 1$.

Zadanie ŚR EUK.1

Dla jakich liczb naturalnych n ułamek

$$\frac{3n+4}{2n+5}$$

jest liczbą całkowitą?

Zadanie ŚR EUK.2

Dla jakich x całkowitych liczba $x^3 + 3x^2 + 3x$ jest podzielna przez $x^2 + 2x + 1$?

3.1.2 Przyspieszony algorytm i złożoność.

Zauważmy, że dopóki $a > b$ wielokrotnie odejmujemy b od a, ostatecznie więc zamiast a otrzymujemy $a \mod b$. Algorytm można zatem przyspieszyć (zakładamy na początku $a \geqslant b$):

1. Jeżeli $a \neq 0$, to $NWD(a, b) := NWD(b, a \mod b)$,
2. a jeżeli $a = 0$, to $NWD(a, b) := b$.

Przykładowo: $NWD(7, 2) = NWD(1, 2) = NWD(2, 1) = NWD(0, 1) = 1$.

Twierdzenie 6 (O złożoności algorytmu Euklidesa)**.** *W powyższym algorytmie obliczaliśmy kolejno NWD dla par $(a, b), (a_1, b_1) = (b, a \mod b), (a_2, b_2) = (b_1, a_1 \mod b_1)$.*

Dla każdych a, b zachodzi $a_2 \leqslant \frac{1}{2}a$, więc złożoność algorytmu to $O(\log a)$.

Dowód. Oczywiście $a_2 = b_1 = a \mod b$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $b \leqslant a/2$. Z definicji $a \mod b < b \leqslant a/2$, więc teza jest dowiedziona,
2. $b > a/2$. W tym przypadku $2b > a$, więc $a \mod b = a - b \leqslant a - a/2 = a/2$.

Wartość a zmniejsza się dwukrotnie podczas dwóch obiegów, więc po ok. $2 \cdot \log_2 a$ obiegach wartość ta wyniesie $a/2^{\log_2 a} = 1$, czyli algorytm na pewno zakończy się. To dowodzi, że jego złożoność jest logarytmiczna. □

3.1.3 Rozszerzony algorytm Euklidesa

Chcemy użyć algorytmu Euklidesa do znalezienia liczb x, y całkowitych takich, że

$$x \cdot a + y \cdot b = NWD(a, b).$$

Przeanalizujmy ciąg równości:

$$1 = NWD(0, 1) = NWD(2 - 2 \cdot 1, 1) = NWD(2, 1) = \\ NWD(1, 2) = NWD(7 - 3 \cdot 2, 2) = NWD(7, 2),$$

$$1 = 1 \cdot \boxed{0} + 1 \cdot \boxed{1} = 1 \cdot \left(\boxed{2} - 2 \cdot \boxed{1}\right) + 1 \cdot \boxed{1} = 1 \cdot \boxed{2} - 1 \cdot \boxed{1} =$$
$$-1 \cdot \boxed{1} + 1 \cdot \boxed{2} = -1 \cdot \left(\boxed{7} - 3 \cdot \boxed{2}\right) + 1 \cdot \boxed{2} = -1 \cdot \boxed{7} + 4 \cdot \boxed{2}.$$

Poniżej podajemy pseudokod uogólnionego algorytmu:

1. Załóżmy $a \neq 0$.

   Niech x', y' będą wartościami zwróconymi przez $NWD(b, a \mod b)$. Znaczy to, że $x' \cdot b + y' \cdot (a \mod b) = NWD(a, b)$. Podstawiamy $a \mod b = a - k \cdot b$, czyli

   $$y' \cdot a + (x' - y'k) \cdot b = x' \cdot b + y' \cdot (a - k \cdot b) = NWD(a, b),$$

   więc zwracamy $y', x' - y'k$. Możemy przy tym zauważyć, że $k = \lfloor a/b \rfloor$.

2. Załóżmy $a = 0$. Wtedy zwracamy $1, 1$, bo $1 \cdot 0 + 1 \cdot b = b = NWD(a, b)$.

Złożoność otrzymanego algorytmu jest taka sama jak algorytmu Euklidesa tzn. $O(\log a)$.

Wniosek 7. *Równanie $x \cdot a + y \cdot b = d$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(a, b) \big| d$.*

Dowód. Załóżmy, że $x \cdot a + y \cdot b = d$. Oczywiście $NWD(a, b) \big| a$ i $NWD(a, b) \big| b$, więc $NWD(a, b) \big| x \cdot a + y \cdot b = d$.

Załóżmy teraz, że $NWD(a, b) \big| d$, czyli $d = NWD(a, b) \cdot l$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$.

Niech x', y' będą liczbami całkowitymi, takimi, że $x' \cdot a + y' \cdot b = NWD(a, b)$. Wtedy

$$(x'l) \cdot a + (y'l) \cdot b = NWD(a, b) \cdot l = d.$$

□

Wniosek 8 (Chińskie twierdzenie o resztach, wersja słabsza.)**.** *Załóżmy, że liczby całkowite dodatnie a, b są względnie pierwsze.*

Dla dowolnych reszt $r_1 \mod a$, $r_2 \mod b$ istnieje liczba całkowita M taka, że $M \equiv r_1 \mod a$ i $M \equiv r_2 \mod b$.

Dowód. Niech x, y będą takie, że $x \cdot a + y \cdot b = NWD(a, b) = 1$.

Oznaczmy $B := x \cdot a, A := y \cdot b$. Zauważmy, że

$$B = 1 - y \cdot b, \text{ stąd } B \equiv 1 \mod b, \text{ oczywiście } B \equiv 0 \mod a.$$

Analogicznie

$$A \equiv 0 \mod b, \quad A \equiv 1 \mod a.$$

Zauważmy, że $r_1 \cdot A + r_2 \cdot B \equiv r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 0 = r_1 \mod A$ oraz $r_1 \cdot A + r_2 \cdot B \equiv r_1 \cdot 0 + r_2 \cdot 1 = r_2 \mod B$, jest to więc szukana liczba. □

Przykład 9. *Istnieje liczba dająca resztę 1 z dzielenia przez 4, resztę 3 z dzielenia przez 5 i resztę 78 z dzielenia przez 101.*

Faktycznie na mocy tw. o resztach istnieje liczba A (skądinąd np. $A = 13$, ale tego nie musimy liczyć) dająca resztę $1 \mod 4$ oraz $3 \mod 5$. Ponownie na mocy tego twierdzenia istnieje liczba B dająca resztę $A \mod 4 \cdot 5$ oraz resztę $78 \mod 101$, bo $NWD(4 \cdot 5, 101) = 1$. Liczba B jest szukaną liczbą (wprost znajdujemy $B = 1593$).

Zadanie ŚR EUK.3

Ile jest liczb podzielnych przez 37 wśród liczb całkowitych

$$\{53, 53 + 68, 53 + 2 \cdot 68, \ldots, 53 + 36 \cdot 68\}?$$

3.2 Indukcja

Załóżmy, że chcemy udowodnić, że $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ dla każdego n naturalnego.

Intuicja. *To ma pomóc w zrozumieniu, ale NIE JEST FORMALNE, nie potrzeba i nie można czegoś takiego pisać!*

Ok, widać, że ten wzorek działa dla $n = 1$.

Ok, jeżeli ten wzorek działa dla 1 to sprawdźmy $n = 2$. Dobrze: $1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$, czyli działa.

To teraz sprawdźmy $n = 3$. Obliczamy, $1 + 2 + 4 = 7 = 2^3 - 1$, dobrze.

Weźmy teraz $n = 4$. Obliczamy, że $1 + 2 + 4 + 8 = (1 + 2 + 4) + 8 = 7 + 8$. I tutaj widać główną zasadę. Zastosujmy ją ogólnie:

Krok indukcyjny.

Załóżmy, że $1 + 2 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$, czyli tezę dla $n - 1$. Wtedy

$$1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = (1 + \ldots + 2^{n-2}) + 2^{n-1} = \left(2^{n-1} - 1\right) + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Ten dowód pozwala na następujące rozumowanie: teza jest prawdziwa dla $n = 1$, więc jest prawdziwa dla $n = 2$, więc i dla $n = 3$, zatem dla $n = 4$, wobec tego dla $n = 5$, czyli i dla $n = 6$, takoż dla $n = 7$ itd. Teza jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych.

Schemat dowodu. Dowód metodą indukcji matematycznej przebiega następująco: sprawdzamy tezę dla $n = 1$ i dowodzimy *kroku indukcyjnego*, po czym, żeby było formalnie mówimy, że na mocy zasady indukcji matematycznej teza jest prawdziwa dla wszystkich n naturalnych.

Przykład dowodu. Zauważmy, że dla $n = 1$ teza jest prawdziwa.

Załóżmy, że $1 + 2 + \ldots + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$, czyli tezę dla $n - 1$. Wtedy

$$1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = (1 + \ldots + 2^{n-2}) + 2^{n-1} = \left(2^{n-1} - 1\right) + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

czyli teza zachodzi również dla n.

Na mocy zasady indukcji zachodzi ona dla wszystkich liczb naturalnych.

Zadanie ŚR IND.1

Udowodnij, że

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Zadanie ŚR IND.2

Wykaż, że dla każdego naturalnego n zachodzą podzielności:

1. $9|10^n - 1$
2. $101|10^{2n} - (-1)^n$
3. $10|2^{2^n} - 6$
4. $11|2^{6n+1} + 3^{2n+2}$

Zadanie ŚR IND.3

Pokaż, że dla dowolnego rzeczywistego $a > -1$ i każdego naturalnego n zachodzi nierówność

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Zadanie ŚR IND.4

Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego, tzn. niech liczby F_n będą zdefiniowane przez następujące warunki:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Udowodnij, że liczby F_n spełniają tożsamości:

1. $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
2. $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$
3. $\sum_{k=0}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$
4. $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$
5. $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

Zadanie ŚR IND.5

Niech $H_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$
Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ prawdziwe są nierówności

$$\frac{n+1}{2} \leqslant H_{2^n} \leqslant n+1.$$

Zadanie ŚR IND.6

Udowodnij, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 7$ zachodzi nierówność

$$(n!)^2 \geqslant n^{n+1}.$$

Zadanie ŚR IND.7

Udowodnij, że dla każdego naturalnego n prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Zadanie ŚR IND.8

Dla naturalnych $n \geqslant 2$ udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

3.3 Dirichlet

Twierdzenie 1 (Zasada Szufladkowa Dirichleta)**.** *Jeżeli $kn+1$ przedmiotów włożymy do n szufladek to w pewnej szufladce będzie co najmniej $k+1$ przedmiotów.*

Zadanie ŚR DIR.1

W klasie jest 37 uczniów. Uzasadnij, że przynajmniej 4 z nich urodziło się w tym samym miesiącu.

Zadanie ŚR DIR.2

Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).

Zadanie ŚR DIR.3

Udowodnij, że wśród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez n.

Zadanie ŚR DIR.4

Na odcinku $[0, 1]$ leży 101 różnych punktów. Wykaż, że można wybrać takie dwa z nich, że ich odległość jest nie większa niż $\frac{1}{100}$.

Zadanie ŚR DIR.5

Udowodnij, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku 3 umieścimy 10 punktów, to znajdą się dwa, które są w odległości nie większej niż 1.

Zadanie ŚR DIR.6

Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych. Udowodnij, że można wybrać z nich takie dwa, że środek odcinka je łączącego też jest punktem kratowym.

Zadanie ŚR DIR.7

Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

Zadanie ŚR DIR.8

Student ma 37 dni na przygotowanie do egzaminu. Wie, że potrzebuje nie więcej niż 60 godzin nauki, ponadto ma zamiar uczyć się przynajmniej godzinę dziennie. Pokaż, ze przy dowolnym rozkładzie liczby godzin spędzonych na nauce w kolejnych dniach, istnieje ciąg dni, w trakcie których liczba godzin nauki będzie równa dokładnie 13.

Zadanie ŚR DIR.9

Wykaż, że wśród liczb: $3, 3^2, 3^3, \ldots$ istnieje taka, której zapis dziesiętny kończy się na 001.

Zadanie ŚR DIR.10

Niech $a_1, a_2, \ldots a_n$ będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że istnieją takie $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$, że $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l$ jest podzielne przez n.

Zadanie ŚR DIR.11

Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że dla dowolnego a niepodzielnego przez p w ciągu liczb $0, a, 2a, \ldots, (p-1)a$ istnieje liczba dająca resztę 1 z dzielenia przez p.

Zadanie ŚR DIR.12

Kratki kartki zeszytu pomalowane są na dwa kolory. Udowodnij, że można wskazać cztery kratki tego samego koloru, których środki są wierzchołkami prostokąta (możesz założyć, że kartka jest bardzo duża).

3.4 0=1, czyli znajdź błąd

Znajdź błędy w poniższych rozumowaniach.

Zadanie ŚR BLAD.1

Załóżmy, że $a = b$. Napiszmy kolejne równości:

$$a^2 = ab,$$

$$2a^2 = a^2 + ab,$$

$$2a^2 - 2ab = a^2 - ab,$$

$$2(a^2 - ab) = a^2 - ab.$$

Dzieląc obustronnie przez $(a^2 - ab)$, otrzymamy $2 = 1$.

Zadanie ŚR BLAD.2

Przeprowadźmy ciąg rozumowań:

$$16 - 36 = 25 - 45,$$

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4},$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2,$$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2},$$

$$4 = 5.$$

Zadanie ŚR BLAD.3

$1\,zł = 100\,gr = 10\,gr \cdot 10\,gr = 0,1\,zł \cdot 0,1\,zł = 0,01\,zł = 1\,gr.$

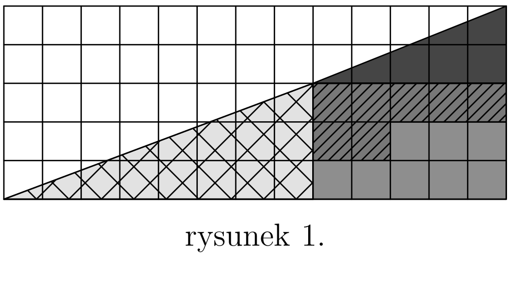
Zadanie ŚR BLAD.4

Udowodnijmy, że wszystkie krowy są jednego koloru. Posłużmy się indukcją względem liczby krów. Oczywiście zbiór złożony z jednej krowy jest zbiorem krów w jednym kolorze. Załóżmy teraz, że w każdym n-elementowym zbiorze krowy są jednego koloru i udowodnijmy prawdziwość naszej tezy dla zbiorów $(n + 1)$-elementowych.

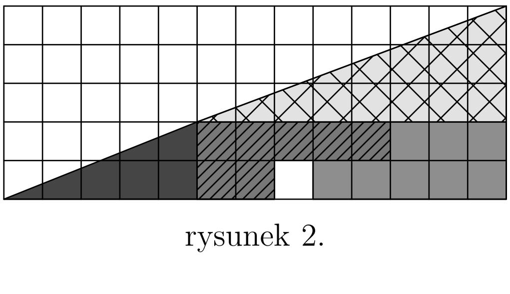
Dodajmy do dowolnego zbioru n-elementowego jeszcze jedną krowę. Mamy zbiór $(n + 1)$-elementowy. Odprowadźmy teraz jedną z pozostałych krów. Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie krowy w tym n-elementowym zbiorze mają ten sam kolor. Teraz możemy z powrotem przyprowadzić krowę usuniętą z naszego zbioru. Była ona oczywiście tego samego koloru co pozostałe, otrzymaliśmy zatem $(n+1)$-elementowy zbiór krów w tym samym kolorze. Zatem na mocy indukcji wszystkie krowy są w tym samym kolorze.

Zadanie ŚR BLAD.5

Części z rysunku 1. zostały przemieszczone. Otrzymaliśmy w ten sposób identyczny trójkąt, jednak z dziurą w środku. Jak to możliwe?

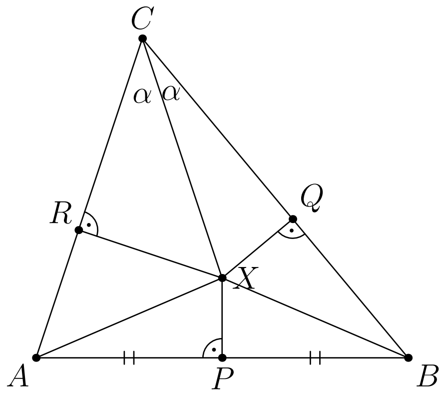


rysunek 1.



rysunek 2.

Zadanie ŚR BLAD.6



Pokażmy, że wszystkie trójkąty są równoboczne. Rozważmy dowolny trójkąt $\triangle ABC$. Niech X będzie punktem przecięcia symetralnej boku AB i dwusiecznej kąta $\sphericalangle ACB$. Z punktu X poprowadźmy proste XR i XQ prostopadłe odpowiednio do boków AC i BC. Zauważmy, że trójkąty $\triangle CRX$ i $\triangle CQX$ są przystające, ponieważ odcinek CX jest ich wspólnym bokiem, $\sphericalangle RCX = \sphericalangle QCX$ oraz $\sphericalangle XRC = \sphericalangle XQC = 90°$. Wynika stąd, że odcinki RC i QC oraz RX i QX są tej samej długości.

Zauważmy, że skoro $\sphericalangle ARX = \sphericalangle BQX = 90°$ oraz $AX = BX$ (gdyż XP jest symetralną AB), to również trójkąty $\triangle AXR$ i $\triangle BXQ$ są przystające, równe są więc boki AR i BQ.

Otrzymujemy stąd, że $AC = AR + RC = BQ + QC = BC$, zatem trójkąt $\triangle ABC$ jest równoramienny. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla symetralnej boku BC i dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$, otrzymamy równość boków BA i CA, $\triangle ABC$ jest zatem równoboczny.

Rozdział 4

Wskazówki

ILOCAMP
obóz matematyczno - informatyczny

4.1 Algorytm Euklidesa

Wskazówka ŚR EUK.1

Obliczamy $NWD(3n + 4, 2n + 5) = NWD(n - 1, 2n + 5) = NWD(2n + 5, n - 1) = NWD(7, n - 1) \leqslant 7$.

Aby $\frac{3n+4}{2n+5}$ było całkowite musi zachodzić podzielność $2n+5 \big| 3n+4$. Aby ta podzielność zachodziła, musi być $NWD(3n + 4, 2n + 5) = 2n + 5$, czyli $2n + 5 \leqslant 7$, stąd $n \leqslant 1$.

Bezpośrednie sprawdzenie przypadków $n = 0, 1$ pokazuje, że tylko dla $n = 1$ podzielność zachodzi.

Wskazówka ŚR EUK.2

Zauważmy, że $x^3 + 3x^2 + 3x = x \cdot (x^2 + 2x + 1) + 1 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 1$, więc $NWD(x^3 + 3x^2 + 3x, x^2 + 2x + 1) = NWD(-1, x^2 + 2x + 1) = 1$. Aby podzielność zachodziła musi

być
$$(x+1)^2 \big| NWD(x^3+3x^2+3x, x^2+2x+1) = 1.$$

Mamy $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geqslant 0$, więc aby $(x+1)^2\big|1$ musi być $(x+1)^2 \leqslant 1$. Ta nierówność ma tylko trzy rozwiązania: $x=-2, x=-1, x=0$. Sprawdzamy te trzy przypadki bezpośrednio.

Wskazówka ŚR EUK.3

Dokładnie jedna — każda z tych 37 liczb daje inną resztę z dzielenia przez 37.

4.2 Indukcja

Wskazówka ŚR IND.1

1. Rozpisz $\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^{n} k) + n + 1$ i zastosuj do pierwszego składnika założenia indukcyjnego.
2. Podobnie jak wyżej: zauważ, że $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$ i skorzystaj z założenia indukcyjnego.

Wskazówka ŚR IND.2

Rozważ wyrażenia:

1. $10(10^n-1)+9$
2. $100(10^{2n}-(-1)^n)+101(-1)^n$
3. $(2^{2^n}-6)^2+12(2^{2^n}-6)+30$
4. $2^6(2^{6n+1}+3^{2n+2})+3^{2n+2}(3^2-2^6)$

Wskazówka ŚR IND.3

Nierówność z założenia indukcyjnego wymnóż stronami przez dodatnie wyrażenie $1+a$.

Wskazówka ŚR IND.4

3. Skorzystaj z faktu $F_kF_l + F_kF_{l+1} = F_kF_{l+2}$, prawdziwego dla $k, l \in \mathbb{N}$, dla par $(k,l) = (2n, 2n)$ i $(k,l) = (2n+2, 2n)$.

4, 5. Udowadniaj oba punkty jednocześnie. Dla przejrzystości rozumowania sformułuj jedną tezę prawdziwą jednocześnie dla liczb naturalnych parzystych i nieparzystych.

Wskazówka ŚR IND.5

Rozpisz $H_{2^{n+1}} = H_{2n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^n+2^n}$.
Zauważ, że $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 2^n \cdot \frac{1}{2^n+1}$

Wskazówka ŚR IND.6

Dla wykazania bazy indukcji zauważ: $2 \cdot 4 > 7$ i $3 \cdot 5 \cdot 6 > 7^2$.
Wykaż nierówność $n^{n+1} \geqslant (n+1)^n$ dla $n \geqslant 3$.
Zauważ, że $(n+1)^{n+2}(n+1)^n \geqslant (n+2)^{n+1}n^{n+1}$.

Wskazówka ŚR IND.7

Wykaż silniejszą nierówność: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$.
Skorzystaj z tego, że $\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+4} > \frac{2}{3n+3}$.

Wskazówka ŚR IND.8

Wykaż silniejszą nierówność $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$.
Zauważ, że $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

4.3 Dirichlet

Wskazówka ŚR DIR.1

Każdy z 12 miesięcy potraktuj jako szufladkę.
Zastosuj twierdzenie dla $n = 12$ i $k = 3$.

Wskazówka ŚR DIR.2

Należy wykazać, że szukana różnica jest podzielna przez 11.

Różnica liczb jest podzielna przez 11 kiedy obie te liczby dają taką samą resztę z dzielenia przez 11.

Za szufladki przyjmij reszty z dzielenia przez 11.

Wskazówka ŚR DIR.3

Niech szufladki odpowiadają resztom z dzielenia przez n.

Wskazówka ŚR DIR.4

Podziel odcinek $[0, 1]$ na 100 części i niech każda z nich odpowiada szufladce.

Wskazówka ŚR DIR.5

Podziel trójkąt na 9 przystających trójkątów równobocznych o boku 1.

Wskazówka ŚR DIR.6

Wprowadź układ współrzędnych. Zwróć uwagę na parzystość współrzędnych punktów.

Wyróżnij 4 szufladki: (np, np), (np, p), (p, np), (p, p), gdzie np oznacza współrzędną nieparzystą, a p współrzędną parzystą.

Wskazówka ŚR DIR.7

Zwróć uwagę na skierowaną odległość po okręgu każdego ambasadora od proporczyka jego państwa.

Szufladce niech odpowiada liczba miejsc dzielących ambasadora od proporczyka jego państwa, licząc od ambasadora zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Wskazówka ŚR DIR.8

Rozważ liczby $b_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$ gdzie a_i to liczba godzin nauki w i-tym dniu oraz liczby $b_k + 13$.

Wskazówka ŚR DIR.9

Za szufladki przyjmij reszty z dzielenia przez 1000.

Zauważ, że $3^n - 3^k = 3^k(3^{n-k} - 1)$ dla $n > k$.

Z powyższego wywnioskuj, że skoro $NWD(3^k, 1000) = 1$, to $1000|3^{n-k} - 1$.

Wskazówka ŚR DIR.10

Niech szufladkom odpowiadają reszty z dzielenia przez n.

Rozważ liczby: $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots a_n$ i umieść je w szufladkach.

Zauważ, że różnica dowolnych dwóch liczb z powyższego zbioru jest sumą szukanej postaci.

Wskazówka ŚR DIR.11

Niech szufladkom odpowiadają reszty z dzielenia przez p.

Załóż, że pewne dwa wyrazy ciągu ka i la $(k > l)$ należą do jednej szufladki.

Wykorzystaj to, że a i p są względnie pierwsze, by pokazać, że $p|k - l$.

Oszacuj $k - l$ z góry i udowodnij, że $k = l$.

Wskazówka ŚR DIR.12

Wśród 7 kratek, leżących w jednej pionowej linii I_1 są co najmniej 4 kratki koloru X, które wyznaczają poziome linie J_1, J_2, J_3, J_4.

Jakie kolory mogą mieć kratki leżące na przecięciu pionowej linii $I_2 \neq I_1$ z liniami J_1, J_2, J_3, J_4?

Rozważenie trzeciej pionowej linii I_3 pomoże skończyć rozwiązanie.

4.4 0=1, czyli znajdź błąd

Wskazówka ŚR BLAD.1

W ostatnim kroku występuje dzielenie przez 0.

Wskazówka ŚR BLAD.2

Z równości $a^2 = b^2$ wynika $a = b$ lub $a = -b$.

Wskazówka ŚR BLAD.3

$1zl = 10 \cdot 10gr$, a nie $10gr \cdot 10gr$.

Wskazówka ŚR BLAD.4

Krok indukcyjny nie działa dla $n = 2$.

Wskazówka ŚR BLAD.5

Obie figury nie są trójkątami.

Wskazówka ŚR BLAD.6

Błędem jest założenie, że punkt X znajduje się wewnątrz trójkąta ABC — w rzeczywistości jest on na zewnątrz, o ile trójkąt nie jest równoramienny (wtedy symetralna i dwusieczna pokrywają się).

Część II

Grupa olimpijska

Rozdział 5

Zadania

5.1 Dzień I

Zadanie OL 1.1

Wielomian P spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$P(2x^3 + x) = P(x)P(2x^2).$$

Udowodnij, że jeśli P ma pierwiastek rzeczywisty, to P jest tożsamościowo równy zero.

Zadanie OL 1.2

Liczby dodatnie a, b, x, y spełniają równości $a^2 + x = b^2 + y$ oraz $a + x^2 = b + y^2$, a także nierówność $a + b + x + y < 2$. Dowiedź, że $a = b$ oraz $x = y$.

Zadanie OL 1.3

Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku O. Wiadomo, że $|OA| = |OC| = 1$ i $|OB| = |OD| = 2$. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.

5.2 Dzień II

Zadanie OL 2.1

Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x + y) - f(x - y) = f(x) \cdot f(y).$$

Zadanie OL 2.2

Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Uzasadnij, że wielomian

$$W(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + (n + 1)^2 \cdot x - n^2$$

ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(-1, 1)$.

Zadanie OL 2.3

W trójkącie ABC zachodzi równość $AB = AC$. Punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest środkiem odcinka AD. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BE.

Dowiedź, że $\sphericalangle AFC = 90°$.

5.3 Dzień IV

Zadanie OL 4.1

Trójkąt $\triangle ABC$ jest ostrokątny oraz $AB \neq BC$. Punkt D jest taki, że $ABCD$ jest równoległobokiem. Proste AD, CD przecinają okrąg opisany na $\triangle ABC$ w punktach X, Y odpowiednio (X, Y są różne od A, C). Udowodnij, że $BX = BY$.

Zadanie OL 4.2

Stu jeden uczestników obozu informatycznego wysłało rozwiązania zadania $HELLO$. Niektóre spośród rozwiązań są *podobne*. Jeżeli rozwiązania A i B oraz B i C są podobne, to rozwiązania A i C są podobne.

Uzasadnij, że da się znaleźć 11-elementowy zbiór uczestników *źli* taki, że rozwiązania zawodników z *źli* są parami podobne, lub 11-elementowy zbiór uczestników *dobrzy* taki, że rozwiązania osób z *dobrzy* parami nie są podobne.

Zadanie OL 4.3

Udowodnij, że dla każdego $x \in (0, 1)$ oraz dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi nierówność

$$\big(1 - (1 - x)^m\big)^n + \big(1 - x^n\big)^m \geqslant 1.$$

5.4 Dzień V

Zadanie OL 5.1

Liczby całkowite dodatnie a, b są względnie pierwsze.

Udowodnij, że w nieskończonym ciągu arytmetycznym $a \cdot n + b,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ istnieje wyraz będący potęgą liczby naturalnej.

Uznajemy, że potęga musi mieć podstawę i wykładnik większe niż 1.

Zadanie OL 5.2

Liczby $a, b, c > 0$ sumują się do 1. Znajdź minimum wyrażenia

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2.$$

Zadanie OL 5.3

Niech w trójkącie ostrokątnym $\triangle ABC$, H oznacza punkt przecięcia wysokości, D jest punktem na boku BC, zaś P jest takim punktem, że $APDH$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że

$$\sphericalangle BPC \geqslant \sphericalangle BAC.$$

5.5 Mecz matematyczny

Zadanie OL M.1

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $\triangle ABC$. Proste AI, BI, CI przecinają okrąg opisany na $\triangle ABC$ w punktach D, E, F odpowiednio. Okręgi o średnicach ID, IE, IF przecinają odcinki BC, CA, AB w parach punktów $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2)$ odpowiednio. Wykaż, że na sześciokącie $X_1X_2Y_1Y_2Z_1Z_2$ da się opisać okrąg.

Zadanie OL M.2

Możemy wykonywać następujące operacje na danym trójmianie kwadratowym $ax^2 + bx + c$:

1. Zamienić a z c miejscami tzn. wziąć trójmian $cx^2 + bx + a$.

2. Zamienić x na $x + s$, gdzie s jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Czy stosując powyższe operacje można przejść od trójmianu $x^2-x-2011$ do $x^2-x-2012$?

Zadanie OL M.3

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki: $\frac{1}{2} \leqslant a, b, c, d \leqslant 2$ oraz $abcd = 1$. Znajdź największą możliwą wartość wyrażenia:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right).$$

Zadanie OL M.4

W polach prostokątnej tablicy umieszczono liczby rzeczywiste. Wiadomo, że dla każdych k, l liczba stojąca na przecięciu k-tego wiersza i l-tej kolumny jest równa iloczynowi sumy liczb k-tego wiersza i l-tej kolumny.

Wykaż, że suma wszystkich liczb znajdujących się w tej tablicy jest równa 1 lub 0.

Zadanie OL M.5

Znajdź największą liczbę naturalną k, przez którą podzielna jest każda z liczb $n^{16}-n^4$, gdzie $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

Zadanie OL M.6

Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y).$$

Zadanie OL M.7

Dowiedź, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwa jest nierówność:

$$x^4 + y^4 + (x^2 + 1)(y^2 + 1) \geqslant x^3(1 + y) + y^3(1 + x) + x + y.$$

Zadanie OL M.8

Niech $a > 1$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Rozstrzygnij, w zależności od liczb całkowitych dodatnich n, m, kiedy zachodzi podzielność

$$a^n - 1 \Big| a^m - 1.$$

Zadanie OL M.9

Niech a, b, c będą długościami boków dowolnego trójkąta. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Wskaż trójkąt, którego boki spełniają nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 1,999.$$

Zadanie OL M.10

W każdym polu kwadratowej tablicy o wymiarach 7×7 umieszczono liczbę 1 lub -1. Niech x_k oznacza iloczyn wszystkich liczb stojących w k-tej kolumnie, a y_k oznacza iloczyn wszystkich liczb stojących w k-tym wierszu, gdzie $k = 1, 2, \ldots, 7$. Czy może się zdarzyć, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 + y_1 + y_2 + \ldots + y_7 = 0?$$

5.6 Trudniejsze

Zadanie OL T.1

W przestrzeni trójwymiarowej danych jest n płaszczyzn. Wyrazić, w zależności od n, maksymalną liczbę obszarów, na które te płaszczyzny mogą dzielić przestrzeń trójwymiarową.

Zadanie OL T.2

Niech $K(\mathbb{Z})$ będzie zbiorem funkcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, spełniających równanie

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

1. Wykaż, że dla każdej funkcji $f \in K(\mathbb{Z})$ zachodzi $f(ny) = n^2 f(y)$ dla wszystkich y całkowitych, n naturalnych.

2. Wyznacz zbiór $K(\mathbb{Z})$.

Zadanie OL T.3

Dane jest $2n$ parami różnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ oraz tablica $n \times n$. W pole leżące w i-tym wierszu i w j-tej kolumnie tablicy wpisano liczbę $a_i + b_j$. Udowodnij, że jeśli iloczyny liczb we wszystkich kolumnach są równe, to również iloczyny liczb we wszystkich wierszach są równe.

Zadanie OL T.4

Ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 100 wybrano 26 liczb. Pokaż, że da się wybrać spośród nich niepusty podzbiór liczb o iloczynie będącym kwadratem liczby całkowitej.
Wskazówka: wśród liczb od 1 do 100 jest 25 liczb pierwszych.

Rozdział 6

Rozwiązania

obóz matematyczno - informatyczny

6.1 Dzień I

Rozwiązanie OL 1.1

Załóżmy przeciwnie, tzn. że P ma pierwiastek rzeczywisty i $P \not\equiv 0$. Niech x_0 będzie pierwiastkiem P o największej wartości bezwzględnej.

Załóżmy najpierw, że $x_0 \neq 0$. Zauważmy, że $x_1 = 2x_0^3 + x_0$ jest także pierwiastkiem P, gdyż $P(x_1) = P(2x_0^3 + x_0) = P(x_0)P(2x_0^2) = 0 \cdot P(2x_0^2) = 0$. Niezerowość x_0 daje nam ostrą nierówność $2x_0^2 + 1 > 1$, a stąd wynika

$$|x_1| = \left|2x_0^3 + x_0\right| = \left|x_0(2x_0^2+1)\right| = |x_0| \cdot \left|2x_0^2 + 1\right| > |x_0|\,,$$

czyli x_1 jest pierwiastkiem P o większej wartości bezwzględnej niż x_0. Sprzeczność ta dowodzi nieprawdziwości poczynionego dodatkowego założenia $x_0 \neq 0$.

Jedynym możliwym pierwiastkiem P jest więc 0. Z twierdzenia Bèzout wynika, że wielomian P jest postaci $P(x) = x^n Q(x)$, gdzie $Q(0) \neq 0$ i $n \geqslant 1$. Podstawiając otrzymujemy $(2x^3 + x)^n Q(2x^3 + x) = x^n Q(x)(2x^2)^n Q(2x^2)$, czyli

$$x^n(2x^2 + 1)^n Q(x(2x^2 + 1)) = 2^n x^{3n} Q(x) Q(2x^2). \tag{6.1}$$

Zauważmy, że 0 nie jest pierwiastkiem żadnego z wielomianów $Q(x), Q(2x^2), Q(x(2x^2+1))$, gdyż $Q(2 \cdot 0^2) = Q(0)$ i $Q(0(2 \cdot 0^2 + 1)) = Q(0)$, a $Q(0) \neq 0$ z przyjętej definicji. Wynika stąd, że 0 jest n-krotnym pierwiastkiem lewej strony równości wielomianowej (6.1) i $3n$-krotnym pierwiastkiem prawej strony tej równości. Stąd $n = 3n$, czyli $n = 0$, wbrew $n \geqslant 1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Rozwiązanie OL 1.2

Załóżmy, że $a \neq b$. Korzystając z założeń zadania otrzymujemy ciąg równości

$$a - b = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = (a^2 - b^2)(y + x) = (a - b)(a + b)(x + y).$$

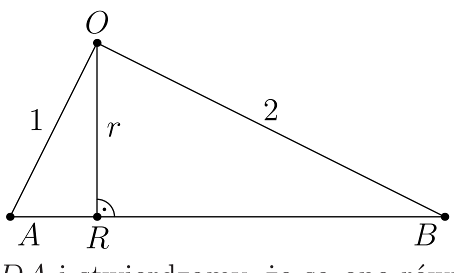
Po podzieleniu stron równania przez $a - b \neq 0$ dostajemy $(a + b)(x + y) = 1$.

Skorzystajmy teraz z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla dodatnich liczb $a + b$ i $x + y$:

$$1 = \sqrt{(a + b)(x + y)} \leqslant \frac{a + b + x + y}{2} < \frac{2}{2} = 1,$$

gdzie druga nierówność wynika z założenia $a + b + x + y < 2$. Otrzymana sprzeczność $1 < 1$ dowodzi, że założenie $a \neq b$ jest fałszywe. Zatem $a = b$, a także $x = y$, bo $x - y = b^2 - a^2 = 0$.

Rozwiązanie OL 1.3



Niech R oznacza rzut O na AB.

Przez r oznaczmy długość promienia okręgu wpisanego w $ABCD$. Skoro $\sphericalangle ORB = 90^\circ$, to

$$|AR| = \sqrt{1^2 - r^2}, \quad |BR| = \sqrt{2^2 - r^2},$$

$$|AB| = |AR| + |RB| = \sqrt{1^2 - r^2} + \sqrt{2^2 - r^2}.$$

Analogicznie obliczamy długości boków BC, CD, DA i stwierdzamy, że są one równe AB: $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$. Na mocy cechy bbb wnioskujemy, że trójkąty $\triangle AOB, \triangle COB, \triangle COD, \triangle AOD$ są przystające.

Z ww. przystawania wynika w szczególności, że $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle DOA$. Miary tych czterech kątów sumują się do 360°, więc $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle DOA = 90^\circ$. Wynika stąd, że

$$|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

więc obwód $ABCD$ wynosi $4\sqrt{5}$.

6.2 Dzień II

Rozwiązanie OL 2.1

Pokażmy, że jedyną funkcją spełniającą zadane równanie jest funkcja tożsamościowo równa zero.

Zauważmy najpierw, że $f(x+y) - f(x-y) = f(x)\cdot f(y) = f(y)\cdot f(x) = f(y+x) - f(y-x)$. Kładąc $x = 0$, otrzymamy

$$f(y) = f(-y) \text{ dla każdego } y \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Jeśli do wyjściowego równania podstawimy $y = 0$, otrzymamy $0 = f(x)\cdot f(0)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ — funkcja ta spełnia wyjściowe równanie.
2. Istnieje a takie, że $f(a) \neq 0$. Z równania $0 = f(x)\cdot f(0)$ (spełnionego także dla a) wynika zatem, że $f(0) = 0$. Biorąc teraz $y = x = a$, otrzymamy $f(2a) = f(a)^2$, natomiast kładąc $y = -a$, $x = a$, dostaniemy $-f(2a) = f(a)\cdot f(-a)$.

   Wynika stąd, że $f(a)\cdot f(-a) = -f(a)^2$, równoważnie: $f(a)\cdot(f(a) + f(-a)) = 0$, a skoro $f(a) \neq 0$, to $f(-a) = -f(a)$. Tymczasem z 6.2 wiemy, że $f(-a) = f(a)$, zatem $f(a) = 0$. Sprzeczność.

Jedyną funkcją spełniającą równanie jest funkcja tożsamościowo równa 0.

Rozwiązanie OL 2.2

Zauważmy, że $W(-1) \leqslant 1-(n+1)^2-n^2 < 0$ oraz $W(1) \geqslant (n+1)^2-n^2 > 0$. Z ciągłości wielomianu wynika, że ma on przynajmniej jeden pierwiastek w przedziale $(-1,1)$.

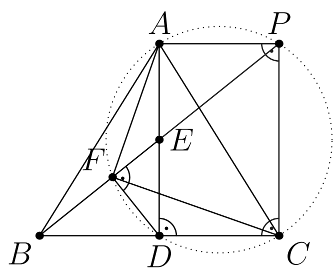
Obliczamy, że $W' = n\cdot x^{n-1} + (n-1)\cdot x^{n-2} + \ldots + 2\cdot x + (n+1)^2$. Jeżeli $x \in (-1,1)$, to

$$\left|n\cdot x^{n-1} + (n-1)\cdot x^{n-2} + \ldots + 2\cdot x\right| \leqslant n\cdot\left|x^{n-1}\right| + (n-1)\cdot\left|x^{n-2}\right| + \ldots + 2\cdot|x| <$$
$$< n + (n-1) + \ldots + 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 < (n+1)^2,$$

więc $W'(x) > 0$ jeżeli $x \in (-1,1)$, czyli wielomian W jest na tym przedziale rosnący. Znaczy to, że przyjmuje każdą wartość, w tym 0, co najwyżej raz, więc ma co najwyżej jeden pierwiastek.

Łącznie wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(-1,1)$, czego należało dowieść.

Rozwiązanie OL 2.3



Zauważmy, że D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Wybierzmy punkt P tak, żeby czworokąt $ADCP$ był prostokątem. Skoro $PC = 2ED$ oraz $BC = 2BD$, to punkt P leży na prostej BE.

Zauważmy, że $\sphericalangle PFD = \sphericalangle PCD = 90^\circ$, zatem czworokąt $PFDC$ jest wpisany w okrąg. Co więcej, jest to okrąg opisany na prostokącie $ADCP$, więc $\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$.

6.3 Dzień IV

Rozwiązanie OL 4.1

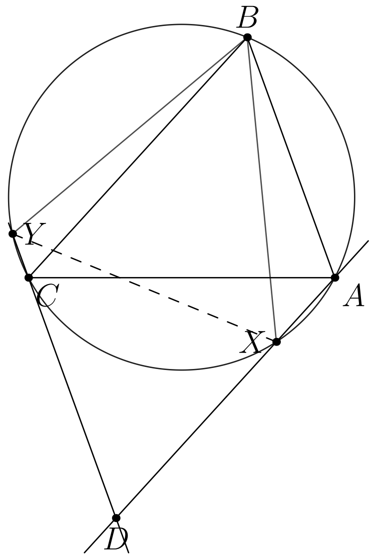
Skoro $ABCD$ jest równoległobokiem, to $\sphericalangle XDY = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Stosując twierdzenie o siecznych do punktu D i okręgu opisanego na $\triangle ABC$ otrzymujemy $DC \cdot DY = DA \cdot DX$, czyli $\frac{DY}{DX} = \frac{DA}{DC} = \frac{BC}{BA}$.

Wraz z równością kątów otrzymujemy podobieństwo $\triangle XDY \simeq \triangle ABC$.

Chcemy teraz udowodnić, że $\sphericalangle YXB = \sphericalangle ABC$.

Z ww. podobieństwa trójkątów wynika $\sphericalangle YXD = \sphericalangle CAB$. Rozważmy dwa przypadki:



1. Punkt X leży na odcinku AD.

   W tym przypadku $\sphericalangle BXA = \sphericalangle BCA$, więc $\sphericalangle BXY = 180° - \sphericalangle BXA - \sphericalangle YXD = 180° - \sphericalangle BCA - \sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$.

2. Punkt X nie leży na odcinku AD.

   Skoro X nie leży na odcinku AD, to znaczy, że leży on na tym łuku AB, na którym nie leży C. Wynika stąd, że $\sphericalangle BXA = 180° - \sphericalangle BCA$. Obliczamy:

$$180° - \sphericalangle BCA = \sphericalangle BXA = \sphericalangle BXD = \sphericalangle BXY + \sphericalangle YXD = \sphericalangle BXY + \sphericalangle CAB, \quad \sphericalangle BXY = \sphericalangle ABC.$$

W obu przypadkach $\sphericalangle BXY = \sphericalangle ABC$. Analogicznie udowadniamy, że $\sphericalangle BYX = \sphericalangle CBA$, więc $\sphericalangle BXY = \sphericalangle BYX$ i trójkąt $\triangle BXY$ jest równoramienny.

Rozwiązanie OL 4.2

Oznaczmy $a \sim b$ "rozwiązania osób a i b są podobne". Z definicji wynika, że $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \sim a$, a z zadania wynika, że dla dowolnych osób A, B, C jeżeli $A \sim B$ i $B \sim C$ to $A \sim C$.

Niech a będzie dowolną osobą i niech $\mathit{Podobne}(a)$ oznacza zbiór osób, które mają rozwiązania podobne do a. Zauważmy, że:

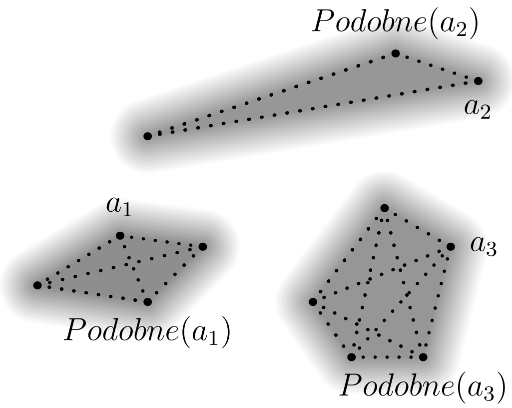
1. Osoby z $\mathit{Podobne}(a)$ mają parami podobne rozwiązania.

   Dowód: niech $b, c \in \mathit{Podobne}(a)$. Wtedy $b \sim a$ i $a \sim c$, czyli $b \sim c$.

2. Żadna osoba spoza $\mathit{Podobne}(a)$ nie ma rozwiązania podobnego do osoby z $\mathit{Podobne}(a)$.

   Dowód: Załóżmy, że osoba $B \notin \mathit{Podobne}(a)$ ma rozwiązanie podobne do osoby $c \in \mathit{Podobne}(a)$, czyli $c \sim B$. Wiemy, że $a \sim c$, więc $a \sim B$, co przeczy $B \notin \mathit{Podobne}(a)$.

Niech *Zawodnicy* oznacza zbiór wszystkich zawodników. Weźmy dowolną osobę a_1 z *Zawodnicy* i odrzućmy z *Zawodnicy* zbiór *Podobne*(a_1). Następnie wybierzmy $a_2 \in$ *Zawodnicy*, odrzućmy z *Zawodnicy* zbiór *Podobne*(a_2) i tak dalej, dopóki nie wyczerpiemy zbioru zawodników.
Na rysunku część przykładowego podziału. Połączeni zawodnicy mający podobne rozwiązania.
Podzieliliśmy zbiór zawodników na podzbiory rozłączne



$$Podobne(a_1), Podobne(a_2), \ldots, Podobne(a_n).$$

Jeżeli któryś ze zbiorów *Podobne*(a_1), *Podobne*$(a_2), \ldots,$ *Podobne*(a_n) ma co najmniej 11 elementów, to istnieje 11 osób (z tego zbioru) mających parami podobne rozwiązania.

Jeżeli każdy ze zbiorów *Podobne*$(a_1), \ldots,$ *Podobne*(a_n) ma co najwyżej 10 elementów, to tych zbiorów jest co najmniej 11 (bo są rozłączne i ich suma ma 101 elementów). Osoby z różnych zbiorów nie mają podobnych rozwiązań, więc wybierając po jednej osobie z 11 różnych zbiorów otrzymujemy zbiór jedenastu osób, których rozwiązania parami nie są podobne.

Rozwiązanie OL 4.3

Rozważmy tabelę o m wierszach i n kolumnach. Każde pole z prawdopodobieństwem x kolorujemy na czarno, a z prawdopodobieństwem $1-x$ na biało. $\big(1-(1-x)^m\big)^n$ to prawdopodobieństwo tego, że w każdej kolumnie jest czarne pole, a $\big(1-x^n\big)^m$ to prawdopodobieństwo tego, że w każdym wierszu jest białe pole.

Gdyby żadne z ww. zdarzeń nie zaszło, to istniałaby biała kolumna i czarny wiersz, sprzeczność. Zawsze zachodzi jedno z tych zdarzeń, więc suma ich prawdopodobieństw jest równa co najmniej 1.

II Rozwiązanie OL 4.3

Rozwiązanie metodami analizy matematycznej. Po szczegóły odsyłamy do wykładu Aleksandry Baranowskiej.

Na początku zauważmy, że jeśli $n = 1$ lub $m = 1$ to obie strony nierówności z zadania są równe. Dalej zakładamy $n, m \geqslant 2$.

Część I Rozważmy funkcję $f(x) := \big(1-(1-x)^m\big)^n + \big(1-x^n\big)^m$. Funkcja ta jest wielomianem, więc f' istnieje i jest ciągła.

Zauważmy, że $f(0) = f(1) = 1$. Z twierdzenia Rolle'a wynika, że f ma na przedziale $(0,1)$ ekstremum lokalne, w którym f' zeruje się.

Udowodnimy teraz, że f' ma co najwyżej jedno miejsce zerowe na przedziale $(0,1)$. Ustalmy pomocniczo $y := 1-x$. Obliczamy

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n\cdot\big(1-(1-x)^m\big)^{n-1}\cdot(-1)\cdot m\cdot(1-x)^{m-1}\cdot(-1) + m\cdot\big(1-x^n\big)^{m-1}\cdot(-nx^{n-1}) = \\
&n\cdot m\cdot\Big(\big(1-(1-x)^m\big)^{n-1}\cdot(1-x)^{m-1} - \big(1-x^n\big)^{m-1}\cdot x^{n-1}\Big) = \\
&n\cdot m\cdot\big((1-y^m)^{n-1}\cdot(1-x)^{m-1} - (1-x^n)^{m-1}\cdot(1-y)^{n-1}\big).
\end{aligned}$$

Skoro $x \in (0,1)$, to równość $f'(x) = 0$ przepisuje się jako

$$(1-y^m)^{n-1} \cdot (1-x)^{m-1} = (1-x^n)^{m-1} \cdot (1-y)^{n-1} \text{ czyli } \left(\frac{1-y^m}{1-y}\right)^{n-1} = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^{m-1}.$$

Zdefiniujmy $f_+(x) := \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^{m-1}$, $f_-(x) := \left(\frac{1-y^m}{1-y}\right)^{n-1}$. Ze wzorów skróconego mnożenia wynika $f_+(x) = (1+x+\ldots+x^{n-1})^{m-1}$ oraz $f_-(x) = (1+y+\ldots+y^{m-1})^{n-1}$.

Tak więc $f_+(x)$ jest rosnąca względem x, gdy $x > 0$, a $f_-(x)$ jest rosnąca względem y, czyli malejąca względem x, gdy $x < 1$. Równanie $f_+(x) = f_-(x)$ ma więc co najwyżej jedno rozwiązanie dla $x \in (0,1)$; równoważnie równanie $f'(x) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Część II Funkcja $f(x)$ jest wielomianem. Chcemy teraz obliczyć najmniejszą (ale dodatnią) potęgę x tego wielomianu, przy której jest niezerowy współczynnik. Obliczamy

$$\big(1-(1-x)^m\big)^n = \left(mx - \binom{m}{2}x^2 + \ldots \pm x^m\right)^n,$$

więc najmniejszą potęgą x uzyskaną z tego wyrażenia jest $m^n x^n$.

Z wyrażenia $\big(1-x^n\big)^m$ wydzieli się składnik 1 oraz $-mx^n$. Ostatecznie $f(x)$ ma postać

$$f(x) = 1 + (m^n - m)x^n + x^{n+1}Q(x),$$

gdzie Q jest pewnym wielomianem. Z postaci tej wynika w szczególności, że f jest rosnąca w pewnym otoczeniu 0, więc $f' > 0$ w pewnym otoczeniu 0.

Podsumowanie Wiemy, że $f'(x)$ jest funkcją ciągłą, że jest dodatnia w pewnym otoczeniu 0, i przyjmuje wartość 0 tylko raz, w pewnym x_0.

W każdym ekstremum lokalnym pochodna zeruje się, więc istnieje tylko jedno możliwe ekstremum — ekstremum w punkcie x_0.

Funkcja f' jest ciągła i nie przyjmuje wartości 0 na $(0, x_0)$ więc ma stały znak na $(0, x_0)$, a skoro jest dodatnia w pewnym otoczeniu 0, to i na całym przedziale $(0, x_0)$. Wynika stąd, że f jest na tym przedziale rosnąca, stąd x_0 jest maksimum lokalnym funkcji f, więc nie istnieją minima lokalne funkcji f, a stąd

$$\min_{x \in (0,1)} f(x) = \min\left(f(0), f(1)\right) = 1.$$

To kończy dowód.

6.4 Dzień V

Rozwiązanie OL 5.1

Lemat OL 5.1 1 (Lemat 1)**.** *Niech liczby a, b będą względnie pierwsze. Wtedy istnieje takie c całkowite, że $b \cdot c \equiv 1 \mod a$.*

I Dowód lematu. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje takie M całkowite, że $M \equiv 1 \mod a$ oraz $M \equiv 0 \mod b$, czyli $M = bc$ dla pewnego c. To c spełnia tezę lematu. $\square$

II Dowód lematu. Z rozszerzonego algorytmu Euklidesa wynika, że istnieją takie c, d całkowite, że $c \cdot b + d \cdot a = NWD(a, b) = 1$. Liczba c spełnia tezę lematu. $\square$

Po pierwsze, odrzucając pierwszy wyraz ciągu, możemy założyć, że $b > 1$. Zbiór $\{b, b^2, \ldots, b^{a+1}\}$ ma więcej niż a elementów, więc któreś dwa z nich dają tę samą resztę z dzielenia przez a:

$$b^k \equiv b^l \mod a,$$

gdzie $k < l$. Na mocy lematu istnieje c całkowite takie, że $bc \equiv 1 \mod a$. Mnożąc powyższą równość przez c^k otrzymujemy

$$1 \equiv c^k b^k \equiv c^k b^l \equiv b^{l-k} \mod a, \text{ więc } b \equiv b^{l-k+1} \mod a.$$

Skoro $l-k+1 \geqslant 1+1 = 2$ i $b > 1$, to b^{l-k+1} jest potęgą i $b^{l-k+1} > b$, a więc $b^{l-k+1} = n \cdot a + b$ dla pewnego n całkowitego dodatniego.

Rozwiązanie OL 5.2

Niech $f(x) := \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2 + x^2 + x^{-2}$. Wtedy druga pochodna f jest równa $2 + 6x^{-4}$, jest więc dodatnia, gdy $x > 0$, czyli f jest wypukła na $(0, \infty)$.

Stosujemy nierówność Jensena

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 &= 3 \cdot \frac{1}{3}\Big(f(a) + f(b) + f(c)\Big) \\ &\geqslant 3 \cdot f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3 \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{100}{3}.\end{aligned}$$

Wyrażenie z zadania osiąga wartość $\frac{100}{3}$, gdy $a = b = c = 1/3$, więc $100/3$ jest minimalną wartością tego wyrażenia.

II Rozwiązanie OL 5.2

Tak jak w poprzednim rozwiązaniu udowodnimy, że wartość wyrażenia po lewej jest nie mniejsza od $\frac{100}{3}$.

Zauważmy, że $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2 + x^2 + x^{-2}$ dla dowolnego x, stąd

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 6.$$

Na mocy nierówności pomiędzy średnią harmoniczną i kwadratową dla liczb a^2, b^2, c^2 oraz $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}, \quad \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}{3}} \geqslant \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3}.$$

Teraz na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb a, b, c zachodzi

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \text{ stąd } \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geqslant \frac{3}{a+b+c}, \text{ więc } \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{3}} \geqslant \frac{3}{a+b+c}.$$

Z powyższych nierówności obliczamy

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3} \text{ oraz } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant 27$$

a stąd już wynika teza.

To rozwiązanie można przeprowadzić naturalniej, używając nierówności pomiędzy średnimi potęgowymi.

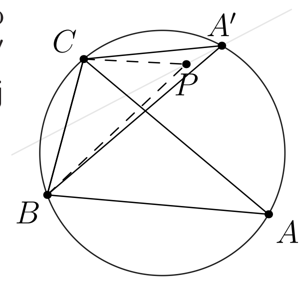
Rozwiązanie OL 5.3

Załóżmy najpierw, że $D \neq B, C$.

Lemat OL 5.3 1. *Jeżeli punkt P leży wewnątrz okręgu opisanego na $\triangle ABC$, po tej samej stronie odcinka BC co A, to $\sphericalangle BPC > \sphericalangle BAC$.*

Dowód lematu.

Niech A' będzie dowolnym punktem okręgu opisanego takim, że P leży wewnątrz $\triangle A'BC$ (przykładowo A' może być punktem przecięcia prostej przechodzącej przez P i środek odcinka BC, jak na rysunku). Wtedy



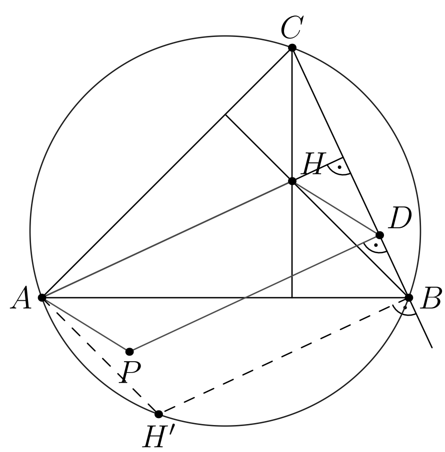
$$\sphericalangle BPC = 180° - \sphericalangle PBC - \sphericalangle PCB >$$

$$> 180° - \sphericalangle A'BC - \sphericalangle A'CB = \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC.$$

□

Punkt P leży po tej samej stronie odcinka BC, co A, na mocy lematu wystarczy więc udowodnić, że leży on wewnątrz okręgu opisanego na $\triangle ABC$.

Niech H' będzie odbiciem H względem środka AB, innymi słowy niech będzie ono takie, że $AHBH'$ jest równoległobokiem. Wtedy $\sphericalangle AH'B = \sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle ACB$, więc H' leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$.



Odcinki $H'B, PD$ są równoległe do AH, a więc prostopadłe do BC, i o długości równej AH. Wynika stąd, że $PDBH'$ jest prostokątem, którego dwa wierzchołki: H', B leżą na okręgu, a trzeci, D, wewnątrz okręgu. Czwarty wierzchołek – P – leży więc również wewnątrz okręgu, co kończy dowód przy założeniu $D \neq B, C$.

Jeżeli $D = B$, to P pokrywa się z punktem H' z powyższego rozumowania, więc leży na okręgu i tym samym $\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAC$. W przypadku $D = C$ dowodzimy identycznie, zamieniając jedynie role punktów B i C.

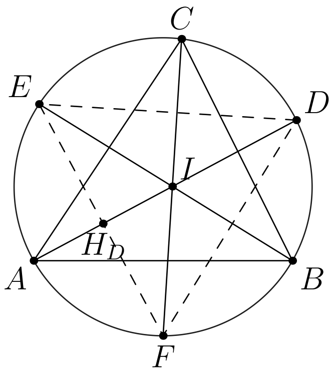
6.5 Mecz matematyczny

Rozwiązanie OL M.1

Lemat OL M.1 1. *Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, a punkty D, E, F są punktami przecięcia AI, BI, CI odpowiednio z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ (różnymi od A, B, C). Wówczas punkt I jest ortocentrum $\triangle DEF$.*

Dowód. Niech H_D oznacza przecięcie odcinków AD i EF. Obliczamy

$$\sphericalangle EH_DD = 180° - \sphericalangle H_DED - \sphericalangle EDH_D =$$
$$180° - (\sphericalangle FEB + \sphericalangle BED) - \sphericalangle EDA =$$
$$180° - \frac{1}{2}\sphericalangle BCA - \frac{1}{2}\sphericalangle CAB - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 90°.$$

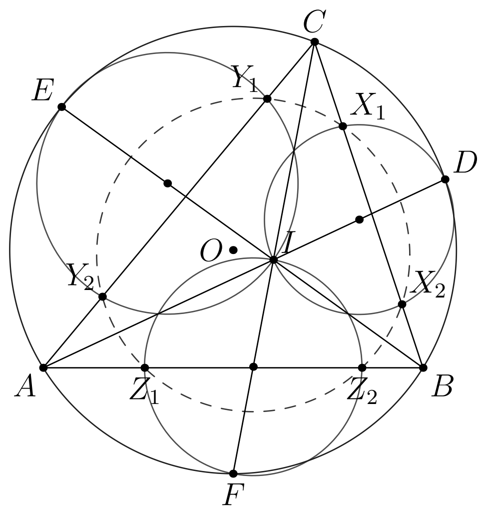


Wynika stąd, że AD zawiera wysokość trójkąta $\triangle DEF$. Analogiczny dowód przeprowadzamy dla BE i CF i konkludujemy, że punkt I pokrywa się z ortocentrum tego trójkąta. □

Niech O oznacza środek okręgu opisanego na $\triangle ABC$.

Rozważmy okręgi o_{DI}, o_{EI} o średnicach DI, EI. Prosta IC zawiera punkt wspólny I tych okręgów i jest, na mocy lematu, prostopadła do DE, więc IC jest osią potęgową tych okręgów, w szczególności potęgi C względem o_{DI}, o_{EI} są równe.

Możemy więc zapisać $CX_1 \cdot CX_2 = pot(C, o_{DI}) = pot(C, o_{EI}) = CY_1 \cdot CY_2$, zatem na czworokącie $X_1X_2Y_1Y_2$ można opisać okrąg.



Środek okręgu opisanego na $X_1X_2Y_1Y_2$ leży na przecięciu symetralnej X_1X_2 oraz Y_1Y_2. Symetralna X_1X_2 jest prostopadła do BC i przechodzi przez środek odcinka DI. Prosta prostopadła do BC i przechodząca przez D przechodzi również przez O, więc z twierdzenia Talesa symetralna X_1X_2 przechodzi przez środek odcinka OI. Analogicznie dowodzimy, że symetralna Y_1Y_2 przechodzi przez ten punkt, więc jest on środkiem okręgu opisanego na $X_1X_2Y_1Y_2$.

Analogicznie udowadniamy, że punkty $X_1X_2Z_1Z_2$ leżą na okręgu o środku w połowie odcinka OI, więc wszystkie sześć punktów $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ leży na tym okręgu.

Rozwiązanie OL M.2

Formalnie definiujemy wyróżnik trójmianu jako $\Delta(ax^2 + bx + c) = b^2 - 4ac$.

Sprawdźmy, że wyznacznik trójmianu nie zmienia się przy wykonywaniu operacji:

1. Tutaj $\Delta(cx^2 + bx + a) = \Delta(ax^2 + bx + c)$ trywialnie.

2. Mamy $a(x+t)^2+b(x+t)+c=ax^2+(2at+b)x+(at^2+bt+c)$. Stąd też $\Delta\Big(a(x+t)^2+b(x+t)+c\Big)=(2at+b)^2-4a(at^2+bt+c)=b^2-4ac=\Delta(ax^2+bx+c)$.

   Tę część można by również uzasadnić bez obliczeń: trzeba zauważyć, że jeżeli x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu ax^2+bx+c (aby zawsze istniały trzeba liczb zespolonych...), to $\Delta(ax^2+bx+c)=a^2(x_1-x_2)^2$. Trójmian z podstawionym $x+t$ za x ma pierwiastki x_1-t, x_2-t i wyraz przy x^2 równy a, zatem ma taki sam Δ jak wyjściowy trójmian.

Skoro wyróżnik nie zmienia się przy wykonywaniu operacji oraz $\Delta(x^2-x-2011)\neq\Delta(x^2-x-2012)$, to pierwszego z tych trójmianów nie można zamienić na drugi.

Rozwiązanie OL M.3

Korzystając z równości $abcd=1$ obliczamy

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)=ac+\frac{a}{d}+\frac{c}{b}+\frac{1}{bd}=ac+a^2bc+ac^2d+ac=ac\left(ab+2+cd\right),$$

$$\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)=bd+\frac{b}{a}+\frac{d}{c}+\frac{1}{ac}=bd+b^2cd+abd^2+bd=bd\left(bc+2+ad\right),$$

skąd otrzymujemy

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)=\left(ab+2+cd\right)\left(bc+2+ad\right).$$

Ponadto

$$ab+2+cd=ab+2+\frac{1}{ab}=\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2,$$

$$bc+2+ad=bc+2+\frac{1}{bc}=\left(\sqrt{bc}+\frac{1}{\sqrt{bc}}\right)^2,$$

co implikuje równość

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)=\left[\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(\sqrt{bc}+\frac{1}{\sqrt{bc}}\right)\right]^2=$$

$$\left(\sqrt{ab^2c}+\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}+\frac{1}{\sqrt{ab^2c}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{d}}+\sqrt{\frac{d}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2.$$

Biorąc teraz $f(x)=x+\frac{1}{x}$, otrzymamy

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)=\left[f\left(\sqrt{\frac{b}{d}}\right)+f\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)\right]^2.$$

Na mocy warunku $\frac{1}{2}\leqslant a,b,c,d\leqslant 2$ liczby $\sqrt{\frac{b}{d}}$ i $\sqrt{\frac{a}{c}}$ należą do przedziału $[\frac{1}{2},2]$. Badając pochodną $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ możemy stwierdzić, że f jest malejąca dla $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, ma minimum w $x=1$ oraz jest rosnąca dla $x\in(1,2)$. Zatem dla każdego $t\in[\frac{1}{2},2]$ mamy

$f(t) \leqslant \max\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)\} = \frac{5}{2}$ (tę nierówność można również udowodnić bez użycia pochodnych). Wynika stąd, że

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right) \leqslant \left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 = 25.$$

Pozostaje zauważyć, że dla $a = b = 2$, $c = d = \frac{1}{2}$ nierówność staje się równością i że liczby te spełniają warunki zadania.

Rozwiązanie OL M.4

Niech n będzie ilością wierszy, a m ilością kolumn tablicy. Ponadto niech $x_{k,l}$ będzie liczbą znajdującą się w k-tym wierszu i l-tej kolumnie. Wtedy

$$x_{k,l} = \sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{i,l}\,,$$

więc suma S wszystkich liczb w tablicy jest równa:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m} x_{k,l}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{i,l}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \cdot \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,l}\right)\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{k,j} \cdot S\right) = S \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{k,j}\right) = S \cdot S.$$

Jedynymi rozwiązaniami równania $S = S^2$ są 0 i 1.

Rozwiązanie OL M.5

Przeliczenie brutalne.

Zauważmy, że $n^{16} - n^4 = n^4(n^{12}-1) = n^4(n^6+1)(n^6-1) = n^4(n^6+1)(n^3+1)(n-1)(n^2+n+1)$. Skoro $k\big|2^{16}-2^4$, to $k \leqslant 2^{16}-2^4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Wykażemy, że $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 65520$ jest szukaną liczbą, pokazując podzielność liczby $n^{16}-n^4$ przez kolejne czynniki.

Dla n parzystych $16\big|n^4$. Dla n nieparzystych $n^4 \equiv n^{16} \equiv 1 \mod 16$.

Dla n podzielnych przez 3 zachodzi $9\big|n^4$. Gdy $n \equiv 1 \mod 3$, to $3\big|n-1$ i $3\big|n^2+n+1$, natomiast gdy $n \equiv 2 \mod 3$, to $n \mod 9 \in \{2,5,8\}$, stąd $9\big|n^3+1$.

Gdy $5\big|n$, to także $5\big|n^4$, natomiast jeżeli $n \equiv 1 \mod 5$, to $5\big|n-1$. Jeżeli n przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2 lub 3, to $n^6 \equiv 4 \mod 5$, zatem $5\big|n^6+1$, a gdy $n \equiv 4 \mod 5$, to $5\big|n^3+1$.

Podzielności przez 7 i 13 wynikają, w przypadku gdy n jest względnie pierwsze z $7, 13$, z małego twierdzenia Fermata: $7\big|n^6-1$ oraz $13\big|n^{12}-1$, a w przypadku $7\big|n$ czy $13\big|n$ są trywialne.

II rozwiązanie

Niech k będzie szukaną liczbą.

Skoro $k\big|2^{16}-2^4$, to $k \leqslant 2^{16}-2^4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Wykażemy, że $k = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 65520$ jest szukaną liczbą, pokazując podzielność liczby $n^{16}-n^4$ przez kolejne czynniki.

Zauważmy, że jeżeli p jest pierwsza, a n nie jest względnie pierwsze z p, to $p \big| n$, więc $p^4 \big| n^4 \big| n^{16} - n^4$. Pozwala nam to rozważać tylko przypadki, gdy n jest względnie pierwsza z $2, 3, 5, 7, 13$ odpowiednio.

Poczyńmy następującą obserwację:

Obserwacja OL M.5 1. *Jeżeli dla pewnego m całkowitego zachodzi $n^l \equiv 1 \mod m$ i $l \big| 12$, to*
$$n^{16} = n^4 \cdot n^{12} = n^4 \cdot (n^l)^{12/l} \equiv n^4 \cdot 1^{12/l} = n^4 \mod m.$$

Aby dokończyć zadanie wystarczy znaleźć odpowiednie l dla $m = 2^4, 3^2, 5, 7, 13$.

W przypadku $m = 2^4$ przeliczamy bezpośrednio, że $n^4 \equiv 1 \mod 16$ dla każdej liczby nieparzystej n.

Dla pozostałych czynników używamy twierdzenia Eulera. Wartości funkcji φ Eulera to
$$\varphi(3^2) = 6 \big| 12, \varphi(5) = 4 \big| 12, \varphi(7) = 6 \big| 12, \varphi(13) = 12 \big| 12, \text{ więc}$$
$$n^6 \equiv 1 \mod 9, \quad n^4 \equiv 1 \mod 5, \quad n^6 \equiv 1 \mod 7, \quad n^{12} \equiv 1 \mod 13.$$

Rozwiązanie OL M.6

Niech f będzie dowolną funkcją spełniające dane równanie. Definiujemy $g(x) := f(x) - f(0)$. Wówczas g również spełnia dane równanie, bowiem $f(x) = g(x) + f(0)$, co po podstawieniu do równania z zadania implikuje
$$xg(x) + xf(0) - yg(y) - yf(0) = (x-y)g(x+y) + (x-y)f(0),$$
skąd po redukcji składnika $(x-y)f(0)$ otrzymujemy $xg(x) - yg(y) = (x-y)g(x+y)$.

Obliczamy $g(0) = f(0) - f(0) = 0$. W równaniu spełnianym przez g kładziemy $y = -x$:
$$xg(x) + xg(-x) = 2xg(0) = 0.$$
Wynika stąd, że g spełnia $g(-x) = -g(x)$, czyli jest nieparzysta.

W równaniu spełnianym przez g w miejsce y podstawiamy $-y$:
$$xg(x) - (-y)g(-y) = (x - (-y))g(x-y).$$
Korzystamy z nieparzystości g i otrzymujemy $xg(x) - yg(y) = (x+y)g(x-y)$. Zauważamy, że lewe strony otrzymanego równania i równania początkowego są równe, więc:
$$(x-y)g(x+y) = (x+y)g(x-y) \text{ dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

Niech a, b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Kładąc $x = \frac{a+b}{2}$ i $y = \frac{a-b}{2}$ otrzymujemy równość
$$bg(a) = ag(b).$$
Skoro a, b były wybrane dowolnie, to równość ta zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Uwaga: przy zamianie zmiennych w równaniach funkcyjnych trzeba zawsze uważać, czy nowe zmienne, takie jak tutaj a, b, mogą przyjmować dowolne wartości.

W powyższym równaniu podstawiamy $b = 1$, otrzymując
$$g(a) = g(1)a.$$

Dowodzi to, że zarówno g jak i f, różniąca się od g o stałą, są liniowe.

Wykazaliśmy, że wszystkie funkcje spełniające zadane równanie są liniowe. Pozostaje sprawdzić, że wszystkie funkcje liniowe faktycznie spełniają ten warunek. Jeżeli $f(x) = \alpha x + \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$xf(x) - yf(y) = x(\alpha x + \beta) - y(\alpha y + \beta) = \alpha(x+y)(x-y) + \beta(x-y) = (x-y)(\alpha(x+y)+\beta) = (x-y)f(x+y).$$

Rozwiązanie OL M.7

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Mnożąc tę nierówność stronami przez a^2 (możemy to zrobić, gdyż $a^2 \geqslant 0$), otrzymamy

$$a^4 + a^2b^2 \geqslant 2a^3b. \tag{6.3}$$

Zapisujemy nierówność 6.3 dla par (a, b) równych $(x, y), (y, x), (y, 1), (1, y), (x, 1), (1, x)$ i dodajemy stronami otrzymanych sześć nierówności, otrzymując nierówność

$$2(x^4 + y^4 + x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1) \geqslant 2(x^3y + y^3x + x^3 + y^3 + x + y),$$

która równoważna jest nierówności wyjściowej.

Rozwiązanie OL M.8

Udowodnimy ogólniejsze twierdzenie

Twierdzenie OL M.8 1. *Jeżeli $a > 1$ jest całkowita, a n, m — całkowite dodatnie, to*

$$NWD(a^n - 1, a^m - 1) = a^{NWD(n,m)} - 1.$$

Intuicyjnie dowód polega na wykazaniu, że obliczając NWD algorytmem Euklidesa obliczamy NWD dla wykładników. Formalnie dowód przeprowadzimy przez indukcję, intuicja będzie widoczna w kroku indukcyjnym.

Dowód. Przez indukcję po $n + m$.

Baza indukcji. Jeżeli $n+m = 2$, to $n = m = 1$. W tym przypadku $NWD(a^n - 1, a^m - 1) = NWD(a-1, a-1) = a - 1 = a^{NWD(1,1)} - 1 = a^{NWD(n,m)} - 1$, zatem teza jest spełniona.

Krok indukcyjny. Jeżeli $n = m$ to teza jest trywialna. Załóżmy, że $n \neq m$; bez straty ogólności $n > m$. Obliczamy:

$$NWD(a^n - 1, a^m - 1) = NWD(a^n - 1 - (a^m - 1), a^m - 1) =$$

$$NWD(a^m(a^{n-m} - 1), a^m - 1) = NWD(a^{n-m} - 1, a^m - 1).$$

przy czym ostatnie przejście wynika z tego, że liczby a^m i $a^m - 1$ są względnie pierwsze. Liczby $n - m, m$ są całkowite dodatnie, a suma $(n - m) + m$ jest mniejsza niż $m + n$, więc możemy zastosować założenie indukcyjne i stwierdzić, że $NWD(a^{n-m} - 1, a^m - 1) = a^{NWD(n-m,m)} - 1$. Ale $NWD(n - m, m) = NWD(n, m)$, więc $NWD(a^{n-m} - 1, a^m - 1) = a^{NWD(m,n)} - 1$. Łącznie

$$NWD(a^n - 1, a^m - 1) = NWD(a^{n-m} - 1, a^m - 1) = a^{NWD(m,n)} - 1,$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego i twierdzenia. □

II sposób. Ten sposób wymaga teorii związanej z pojęciem rzędu. Chętnych odsyłam do odpowiedniego kółka na `matma.ilo.pl`.

Przypomnijmy, że dla każdych x, y, d podzielności $d\big|x$ i $d\big|y$ są równoważne $d\big|NWD(x, y)$.

Niech $d \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Liczby nie będące względnie pierwsze z a nie dzielą żadnej ze stron równania, więc możemy założyć, że $NWD(a, d) = 1$. Niech $r := \mathrm{ord}(a, d)$ będzie rzędem a modulo d. Wtedy

$$d\big|NWD(a^n - 1, a^m - 1) \Leftrightarrow d\big|a^n - 1 \text{ i } d\big|a^m - 1 \Leftrightarrow a^n \equiv 1 \mod d \text{ i } a^m \equiv 1 \mod d.$$

Lemat o rzędzie mówi, że dla każdego l przystawanie $a^l \equiv 1 \mod d$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $r = \mathrm{ord}(a, d)\big|l$. Przekształcamy więc dalej równoważnie

$$a^n \equiv 1 \mod d \text{ i } a^m \equiv 1 \mod d \Leftrightarrow r\big|n \text{ i } r\big|m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r\big|NWD(n, m) \Leftrightarrow a^{NWD(n,m)} \equiv 1 \mod d \Leftrightarrow d\big|a^{NWD(n,m)} - 1.$$

□

Wracając do zadania — podzielność $a^n - 1\big|a^m - 1$ jest równoważna $NWD(a^n - 1, a^m - 1) = a^n - 1$.

Korzystając z twierdzenia wiemy, że $NWD(a^n - 1, a^m - 1) = a^{NWD(n,m)} - 1$, więc jest równe $a^n - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(n, m) = n$, czyli gdy $n\big|m$.

Ostatecznie podzielność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n\big|m$.

Rozwiązanie OL M.9

Skoro a, b, c są długościami boków trójkąta, to $a < b + c$, więc $a + b + c < 2(b + c)$. Wynika stąd $\frac{1}{2(b+c)} < \frac{1}{a+b+c}$, czyli $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$.

Analogicznie dowodzimy, że spełnione są nierówności: $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$ i $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$.

Łącząc te nierówności otrzymujemy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Oznaczmy $\varepsilon := 1/1999$. Wykażemy, że przykładowym trójkątem spełniającym nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 1,999$$

jest trójkąt o bokach $(a, b, c) = (1, 1, \varepsilon)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że długości boków tego trójkąta spełniają nierówności trójkąta, czyli jest to dobrze zdefiniowany trójkąt. Obliczamy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} + \frac{\epsilon}{1+1} > \frac{2}{1+\epsilon} = \frac{2}{\frac{2000}{1999}} = 1,999.$$

Rozwiązanie OL M.10

Nie jest to możliwe.

Oznaczmy $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_7 + y_1 + y_2 + \ldots + y_7$. Zauważmy, że gdy tablica wypełniona jest samymi jedynkami, to $S = 14$. Jeśli liczbę stojącą na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny zastąpimy liczbą przeciwną, to zarówno x_j, jak i y_i zmniejszą się lub zwiększą o 2. W takim razie suma po zmianie równa będzie $S+4$, S lub $S-4$.

Za pomocą wyżej opisanych zamian możemy uzyskać z wyjściowej tablicy każdy układ ± 1. Suma z zadania jest dla każdej z otrzymanych tablic liczbą, która daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4, suma ta nigdy nie przyjmuje więc wartości 0.

6.6 Trudniejsze

Rozwiązanie OL T.1

Niech $\binom{n}{k} := \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$.

Najpierw rozważmy analogiczny problem dla przestrzeni dwuwymiarowej. Niech $f(n)$ oznacza maksymalną liczbę obszarów, na które dzieli płaszczyznę n prostych.

Wiemy, że $n-1$ prostych dzieli płaszczyznę maksymalnie na $f(n-1)$ obszarów. Prowadzimy n-tą prostą l w taki sposób, by nie była równoległa do pozostałych i nie przechodziła przez istniejące już punkty przecięcia.

Proste, które już są narysowane wyznaczają na l dokładnie $n-1$ punktów i tym samym n odcinków (w tym półprostych). Każdy z wyznaczonych na l odcinków dzieli obszar płaszczyzny, w którym się znalazł na dwa obszary, więc liczba obszarów wzrasta w skutek narysowania l o n.

Liczba obszarów może wzrosnąć najwyżej o n, gdyż każda z $n-1$ narysowanych już prostych może przecinać l w co najwyżej jednym punkcie. Otrzymujemy więc zależność $f(n) = f(n-1) + n$ o ile $n \geqslant 1$.

Pozostaje zauważyć, że $f(0) = 1$ i przeprowadzić rachunek:

$$f(n) = f(n-1)+n = f(n-2)+(n-1)+n = \ldots = f(0)+1+2+\ldots+n = 1+\binom{n+1}{2}.$$

Przejdźmy do przypadku trójwymiarowego.

Oznaczmy przez $g(n)$ maksymalną liczbę obszarów, na które dzieli przestrzeń trójwymiarową n płaszczyzn. Liczbę $g(n)$ wyznaczymy analogicznie jak $f(n)$.

Wiemy, że $n-1$ płaszczyzn dzieli przestrzeń maksymalnie na $g(n-1)$ części. Prowadzimy n-tą płaszczyznę Π w taki sposób, by nie była równoległa do żadnej z prostych będących przecięciem już narysowanych płaszczyzn.

Każda z $n-1$ narysowanych płaszczyzn może przecinać Π wzdłuż co najwyżej jednej prostej. Z pierwszej części rozwiązania wiemy, że $f(n-1)$ to maksymalna możliwa liczba obszarów, na którą dzieli płaszczyznę $n-1$ prostych, zatem maksymalna ilość obszarów, na które Π może być podzielona to $f(n-1)$ i w ww. konstrukcji Π jest podzielona na tę liczbę obszarów.

Każdy obszar, wyznaczony na płaszczyźnie Π, dzieli obszar przestrzeni, w którym jest umieszczony, na dwa obszary. Wynika stąd, że liczba obszarów w przestrzeni zwiększa się o $f(n-1)$. Skąd $g(n) = g(n-1) + f(n-1)$.

Lemat OL T.1 1. *Dla liczb naturalnych $k \leqslant n$ zachodzi wzór*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dowód lematu. W dowodzie wykorzystamy własność *trójkąta Pascala* $\binom{i}{k}+\binom{i}{k+1}=\binom{i+1}{k+1}$.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{i+1}{k+1}-\binom{i}{k+1}\right)=\sum_{i=0}^{n}\binom{i+1}{k+1}-\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k+1}=$$

$$=\binom{n+1}{k+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+1}{k+1}-\left(\binom{0}{k+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{k+1}\right)=$$

$$=\binom{n+1}{k+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{k+1}-0-\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

$\square$

Skoro $g(0)=1$, to wykorzystując lemat przy $k=2$ wyznaczamy $g(n)$:

$$g(n)=g(n-1)+f(n-1)=g(0)+\sum_{i=0}^{n-1}f(i)=1+\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\binom{i+1}{2}\right)=$$

$$1+n+\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{2}=1+n+\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{2}=1+n+\binom{n+1}{3}.$$

Rozwiązanie OL T.2

Punkt 1.

Niech f będzie funkcją spełniające dane równanie. Dokonujemy kilku podstawień w wyjściowym równaniu:

1. Kładziemy $x=y=0$, otrzymując $2f(0)=4f(0)$, a stąd $f(0)=0$.
2. Biorąc $x=0$ otrzymujemy $f(y)+f(-y)=2f(y)$, zatem $f(-y)=f(y)$, czyli f jest parzysta.
3. Podstawiając $x:=ny$ dla $n\in\mathbb{N}_+$ otrzymujemy

$$f\big((n+1)y\big)+f\big((n-1)y\big)=2f(ny)+2f(y).$$

Wykorzystując tę ostatnią zależność indukcyjnie dowiedziemy, że

$$f(ny)=n^2f(y). \tag{6.4}$$

Dla $n=0$ równość 6.4 wynika z pierwszego podstawienia, a dla $n=1$ równość 6.4 jest tożsamościowa.

Niech równość 6.4 będzie spełniona dla k i $k-1$, gdzie k jest całkowite, $k-1\geqslant 0$. Pokażemy, że jest ona również spełniona dla $k+1$:

$$f\big((k+1)y\big)=2f(ky)+2f(y)-f\big((k-1)y\big)=$$

$$2k^2f(y)+2f(y)-(k-1)^2f(y)=(k^2+2k+1)f(y)=(k+1)^2f(y).$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dla każdego naturalnego n zachodzi: $f(ny) = n^2 f(y)$.

Punkt 2.

Kładąc $y = 1$ otrzymujemy dla liczb naturalnych następującą równość: $f(n) = n^2 f(1)$. Podstawiając $y = -1$ i korzystając z parzystości f zauważamy, że ta zależność jest prawdziwa także dla całkowitych liczb ujemnych: $f(-n) = n^2 f(-1) = (-n)^2 f(1)$.

Pokazuje to, że $f(n) = \alpha n^2$ dla $n \in \mathbb{Z}$ i pewnego $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pozostaje sprawdzić, że wszystkie funkcje tej postaci spełniają zadane równanie:

$$f(x+y)+f(x-y) = \alpha(x^2+2xy+y^2)+\alpha(x^2-2xy+y^2) = 2\alpha x^2+2\alpha y^2 = 2f(x)+2f(y).$$

Rozwiązanie OL T.3

Wiemy, że wyrażenia postaci $(a_1 + b_j)(a_2 + b_j)\dots(a_n + b_j)$ są równe dla każdego naturalnego $1 \leqslant j \leqslant n$. Niech $W(x) := (a_1 + x)(a_2 + x)\dots(a_n + x)$. Wówczas $W(b_1) = W(b_2) = \dots = W(b_n) =: C$, dla pewnej liczby rzeczywistej C. Niech $Q(x) := W(x) - C$. Zauważmy że $\forall_{1\leqslant i\leqslant n} Q(b_i) = 0$. Na mocy twierdzenia Bèzout wielomian Q jest więc postaci $Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)P(x)$, dla pewnego wielomianu P. Wielomian Q ma ten sam stopień co wielomian W i taki sam jak W współczynnik wiodący, czyli 1. Pokazuje to, że $P \equiv 1$ i tym samym

$$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_n)$$

Dla ustalonego j zbadajmy wartość $Q(-a_j)$. Skoro $W(-a_j) = (a_1 - a_j)(a_2 - a_j)\dots(a_n - a_j) = 0$, to $Q(-a_j) = W(-a_j) - C = -C$. Z drugiej jednak strony $Q(-a_j) = (-a_j - b_1)(-a_j - b_2)\dots(-a_j - b_n) = (-1)^n(a_j + b_1)(a_j + b_2)\dots(a_j + b_n)$. Przyrównując do siebie te dwa wyrażenia otrzymujemy $-C = (-1)^n(a_j + b_1)(a_j + b_2)\dots(a_j + b_n)$, czyli

$$(a_j + b_1)(a_j + b_2)\dots(a_j + b_n) = C(-1)^{n+1}$$

Lewa strona ostaniej równości jest szukanym iloczynem liczb w j-tym wierszu. Pokazaliśmy, że jest on niezależny od wiersza i zawsze równy $C(-1)^{n+1}$, co kończy dowód.

Rozwiązanie OL T.4

Definicja OL T.4 1 (Liczba bezkwadratowa)**.** *Liczba całkowita n jest bezkwadratowa jeżeli dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $p^2 \nmid n$.*

Definicja OL T.4 2 (Część bezkwadratowa)**.** *Jeżeli liczba n jest całkowita i $n \neq 0$, to istnieje taka liczba bezkwadratowa m, że $n = s^2 \cdot m$ dla pewnego s całkowitego.*

Część bezkwadratową oznaczamy $Bk(n)$ (nie jest to przyjęte powszechnie oznaczenie).

Niech dla zbioru X symbol $\prod(X)$ oznacza iloczyn wszystkich elementów X.

Niech A oznacza zbiór wybranych liczb, a $p_1, \dots, p_{25}$ oznaczają liczby pierwsze mniejsze od 100. Zauważmy, że elementy A są iloczynami liczb z $\{p_1, \dots, p_{25}\}$.

Niech $B \subseteq A$ będzie dowolnym podzbiorem. Wtedy $Bk\left(\prod(B)\right) = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_{25}^{a_{25}}$ dla pewnych $a_1, \dots, a_{25}$ całkowitych nieujemnych, a że jest to liczba bezkwadratowa, to $a_1, \dots, a_{25} \leqslant 1$.

Każde a_i przyjmuje jedną z wartości $0, 1$, więc możliwych wartości iloczynu $p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_{25}^{a_{25}} = Bk\left(\prod(B)\right)$ jest 2^{25}.

Niepustych podzbiorów zbioru A jest $2^{26} - 1 > 2^{25}$. Wynika stąd, że dla pewnych podzbiorów $B, C \subseteq A$, takich, że $B \neq C$, zachodzi

$$Bk\left(\prod(B)\right) = Bk\left(\prod(C)\right).$$

To już dowodzi tezy, trzeba tylko przetłumaczyć, co znaczy ten napis.

Niech $m := Bk\left(\prod(B)\right)$, wtedy $\prod(B) = s^2 \cdot m$, $\prod(C) = t^2 \cdot m$ dla pewnych s, t całkowitych. Niech $D := (B - C) \cup (C - B)$. Obliczamy

$$\prod(D) = \frac{\prod(B) \cdot \prod(C)}{\prod(B \cap C)^2} = \left(\frac{s \cdot t \cdot m}{\prod(B \cap C)}\right)^2.$$

więc iloczyn liczb z D jest liczbą całkowitą będącą kwadratem liczby wymiernej, zatem iloczyn ten jest kwadratem liczby całkowitej. Pozostaje zauważyć, że gdyby $D = \emptyset$, to $B - C = \emptyset$ i $C - B = \emptyset$, więc $B \subseteq C$ i $C \subseteq B$, stąd $B = C$, sprzeczność.

Reasumując: D jest niepustym zbiorem, iloczyn elementów którego jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozdział 7

Wykłady

7.1 Pochodne

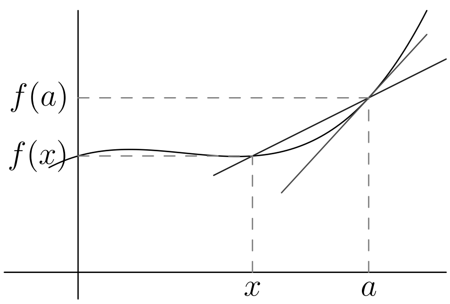
Definicja 1. *Niech $A \subset \mathbb{R}$ i niech $a \in A$. Powiemy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Liczbę $f'(a)$ nazywamy pochodną funkcji w punkcie a. Stosunek $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f.

Interpretacja geometryczna 2.

Rozważmy wykres funkcji f. Iloraz różnicowy $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ jest tangensem kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$ do osi OX. Zgodnie z intuicją, przechodząc z x-ami do granicy, otrzymamy tangens kąta nachylenia stycznej, o ile taka styczna istnieje. Zatem wartość pochodnej w punkcie a jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu, przechodzącej przez a.



Stwierdzenie 3 (Własności pochodnych)**.** *Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Wtedy:*

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, *gdzie c jest stałą rzeczywistą*
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. *jeżeli* $g(x) \neq 0$ *dla* $x \in [a, b]$, *to* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$
5. $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$

Stwierdzenie 4 (Pochodne funkcji elementarnych)**.** *W przypadku najprostszych funkcji pochodne możemy wyznaczyć z następujących wzorów:*

1. $(a)' = 0$ *dla* $a \in \mathbb{R}$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ *dla* $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
4. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ *dla* $a > 0$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *dla* $x > 0$

Zadanie OL DIFF.1

Oblicz pochodne następujących funkcji:

1. $7x^6 + 4x^3 + x^2 + 2x + 1$
2. $5\sqrt{x}$
3. $\frac{1}{x^2}$
4. $\sqrt[3]{x^4}$
5. $(2x^5 + 17)(x^3 - 2x^2 + x)$
6. $\frac{2x^2+3x}{x-3}$
7. $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{13}$
8. $\cos 2x$

9. $\sin^2 x$
10. $\operatorname{tg} x$
11. e^{3x}
12. $e^x \sin x$
13. $4 \ln 9x$
14. $\ln(\ln(\ln x))$
15. 2^{3x^2}
16. x^x

Definicja 5 (pochodne wyższych rzędów)**.** *Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma w całym przedziale pochodne rzędów do $(n-1)$ włącznie. Wówczas f ma n-tą pochodną w a wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna w a. Przyjmujemy*

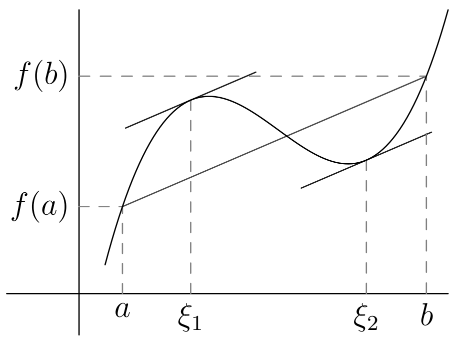
$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}.$$

Lemat 6 (lemat Fermata - warunek konieczny istnienia ekstremum)**.** *Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ osiąga w punkcie x_0 ekstremum. Jeśli pochodna w tym punkcie istnieje, to $f'(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 7 (Rolle'a)**.** *Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (a, b)$. Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że $f'(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 8 (Lagrange'a)**.** *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną w każdym punkcie $x \in (a, b)$. Istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Twierdzenie to mówi, że w przedziale (a, b) istnieje punkt, w którym styczna do wykresu f jest równoległa do siecznej poprowadzonej przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$; w sytuacji na rysunku są to aż dwa punkty: ξ_1, ξ_2.

Wniosek 9. *Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}$, $[c, d] \subset A$, a funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[c, d]$ i różniczkowalna w (c, d). Wówczas:*

1. *Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (c, d)$, to f jest rosnąca na (c, d).*
2. *Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (c, d)$, to f jest malejąca na (c, d).*

Przy nierównościach nieostrych funkcja jest odpowiednio niemalejąca/nierosnąca.

Twierdzenie 10. *Funkcja ciągła $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w (a, b) ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$:*

1. *Minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje δ takie, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

2. *Maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje δ takie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.*

Uwaga 11. *Dowody powyższych twierdzeń można znaleźć w każdym podręczniku do analizy, np. Grigorij M. Fichtenholz, "Rachunek różniczkowy i całkowy", tom I.*

Zadanie OL DIFF.2

Znajdź ekstrema następujących funkcji:

1. $3x^2 + 5x + 2$

2. $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 7$

3. $x^3 + x^2 + x$

4. $2 \sin x + \cos^2 x$

Zadanie OL DIFF.3

Objętość walca jest równa 250π. Wyznacz długość promienia jego podstawy tak, aby pole jego powierzchni całkowitej było najmniejsze.

Zadanie OL DIFF.4

Pokaż, że dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi $\sin x \leqslant x$.

Zadanie OL DIFF.5

Pokaż, że jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 2, to

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

Zadanie OL DIFF.6

Wykaż, że równanie $e^x = x^2 + 2x + 3$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach rzeczywistych.

Zadanie OL DIFF.7

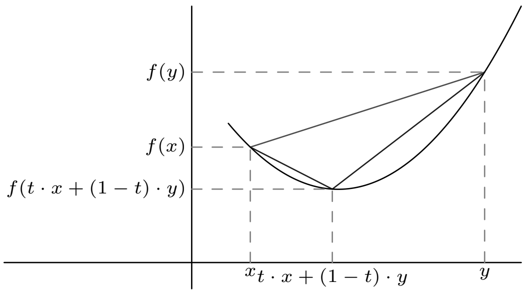
Dla jakich $k \in \mathbb{R}$ równanie $3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + k = 0$ ma 4 rozwiązania?

7.2 Nierówność Jensena

Definicja 1.
Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest* wypukła *wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich* $x, y \in [a,b]$ *i dowolnej liczby* $t \in [0,1]$ *zachodzi nierówność:*

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Gdy nierówność zachodzi w drugą stronę, funkcja jest wklęsła.



Twierdzenie 2. *Załóżmy, że* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna. Wówczas* f *jest wypukła (wklęsła) na* (a,b) *wtedy i tylko wtedy, gdy* f' *jest rosnąca (malejąca) na* (a,b).

Uwaga 3. *Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w każdym podręczniku do analizy, np. Grigorij M. Fichtenholz, "Rachunek różniczkowy i całkowy", tom I.*

Wniosek 4. *Jeśli funkcja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest dwukrotnie różniczkowalna, to* f *jest wypukła (wklęsła) na* (a,b) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $x \in (a,b)$ *zachodzi nierówność* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$.

Uwaga 5. *Przykłady funkcji wypukłych i wklęsłych:*

Funkcje wypukłe	***Funkcje wklęsłe***
x^α *na* $(0,\infty)$ *dla* $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1,\infty)$	x^α *na* $(0,\infty)$ *dla* $\alpha \in [0,1]$
a *dla* $a \in \mathbb{R}$	a *dla* $a \in \mathbb{R}$
x^{2n+1} *na* $(0,+\infty)$	x^{2n+1} *na* $(-\infty,0)$
$\sqrt[3]{x}$ *na* $(-\infty,0)$	$\sqrt[3]{x}$ *na* $(0,+\infty)$
$\sin x$ *na* $(\pi, 2\pi)$	$\sin x$ *na* $(0,\pi)$
$\cos x$ *na* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$	$\cos x$ *na* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
e^x	$\ln x$

Twierdzenie 6 (nierówność Jensena). *Niech* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją wypukłą. Jeżeli* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ *oraz* $\Sigma\alpha_i = 1$, *to zachodzi*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Jeśli funkcja jest wklęsła, nierówność zachodzi w drugą stronę.

Dowód. Zastosujmy indukcję względem n. Dla $n = 2$ nierówność wynika z definicji wypukłości. Załóżmy teraz, że nierówność zachodzi dla n i dowolnych punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ z wagami $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ o sumie równej 1. Niech $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \in [a,b]$, $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1} \in [0,1]$ oraz $\Sigma s_i = 1$. Bez straty ogólności załóżmy, że $s_{n+1} > 0$. Wtedy:

$$f(s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_{n+1} y_{n+1}) =$$

$$f\left(s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_{n-1} y_{n-1} + (s_n + s_{n+1})\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right)\right) \leqslant$$

$$s_1 f(y_1) + s_2 f(y_2) + \ldots + s_{n-1} f(y_{n-1}) + (s_n + s_{n+1}) f\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right),$$

na mocy założenia indukcyjnego zastosowanego do $t_i = s_i$, $x_i = y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz $t_n = s_n + s_{n+1}$ i $x_n = \frac{s_n}{s_n+s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n+s_{n+1}} y_{n+1}$. Szacując ostatni składnik z definicji wypukłości

$$f\left(\frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} y_n + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} y_{n+1}\right) \leqslant \frac{s_n}{s_n + s_{n+1}} f(y_n) + \frac{s_{n+1}}{s_n + s_{n+1}} f(y_{n+1}),$$

kończymy dowód. □

Zadanie OL JEN.1

Wykaż, że dla dowolnych a, b, c dodatnich zachodzi

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqslant (a + b + c)^2.$$

Zadanie OL JEN.2

Dowiedź, że jeśli a, b, c są dodatnie i sumują się do 1, to

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Zadanie OL JEN.3

Niech x, y, z będą kątami w trójkącie. Pokaż, że

$$\sin x + \sin y + \sin z \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie OL JEN.4

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami w trójkącie ostrokątnym, to prawdziwa jest nierówność

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geqslant 1.$$

Zadanie OL JEN.5

Udowodnij nierówność

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} \leqslant 2\sqrt[3]{3}.$$

Zadanie OL JEN.6

Pokaż, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ takich, że $x + y + z = 1$ zachodzi

$$\frac{3x+1}{x+1} + \frac{3y+1}{y+1} + \frac{3z+1}{z+1} \leqslant \frac{9}{2}.$$

Zadanie OL JEN.7

Pokaż, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi sumującymi się do 1, to zachodzi

$$\sqrt{(b+c)(2a+b+c)} + \sqrt{(a+c)(a+2b+c)} + \sqrt{(a+b)(a+b+2c)} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

Zadanie OL JEN.8

Wykaż, że dla dowolnych x, y, z dodatnich zachodzi

$$x\sqrt{y+z} + y\sqrt{x+z} + z\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}.$$

7.3 Izometrie

Będziemy mówić o obrotach, symetriach, translacjach i składaniu ich. Potrzebujemy więc formalnej definicji obrotu, a więc formalnej definicji kąta.

Definicja 1. Kątem skierowanym $\measuredangle ABC$ *nazywamy kąt, o jaki trzeba obrócić wokół B półprostą BA, aby przeszła ona na półprostą BC. Obracamy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.*

Kąty skierowane oznaczamy symbolem $\measuredangle$, w przeciwieństwie do zwykłego $\sphericalangle$. Kąty rozważamy z dokładnością do wielokrotności $360°$, jak zwykle.

Wprost z definicji wynika, że

$$\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA.$$

Lemat 2 (Marzenie początkującego)**.** *Dla dowolnych punktów O, A, B, C takich, że $A, B, C \neq O$ zachodzi*

$$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC.$$

Dowód. Po obrocie o kąt $\measuredangle AOB$ półprosta OA przejdzie na OB, a ta po obrocie względem O o $\measuredangle BOC$ przejdzie na OC, zatem łącznie prosta OA przejdzie na OC, czyli obróciliśmy o $\measuredangle AOC$. □

Przypomnijmy oznaczenia:

obrót wokół O o kąt α	O_O^α
symetria względem prostej l	S_l
przesunięcie o wektor AB	T_{AB}

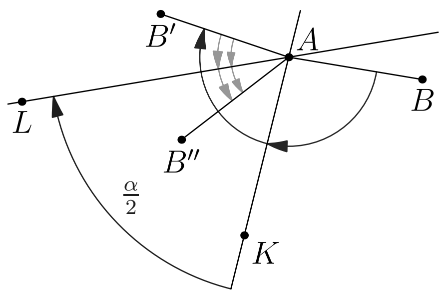
Zauważmy, że w definicji obrotu rozważamy zawsze kąty skierowane.

Przypomnijmy także, że przekształcenia składamy od prawej strony, tzn. $f \circ g$ to ta sama funkcja co $f(g(x))$.

Twierdzenie 3. *Obrót O_A^α jest równy złożeniu symetrii względem dowolnej prostej k i prostej przecinającej k w punkcie A, tworzącej z k kąt $\frac{\alpha}{2}$.*

Dowód.

Niech k, l będą dowolnymi prostymi z zadania, oznaczmy $K \in k, L \in l$ tak, by $\measuredangle KAL = \frac{\alpha}{2}$. Rozważmy dowolny punkt B, punkt $B' = S_k(B)$ oraz $B'' = S_l(B')$. Chcemy wykazać, że B'' jest obrazem B przy obrocie O_A^α. Jeżeli $B = A$, to $B'' = B' = B = A$, więc teza jest spełniona. Dalej zakładamy $B \neq A$. Skoro B, B' są symetryczne względem AK, to $\measuredangle BAK = \measuredangle KAB'$, stąd $2 \cdot \measuredangle BAK = 2 \cdot \measuredangle KAB' = \measuredangle BAB'$.



Analogicznie $2 \cdot \measuredangle B'AL = 2 \cdot \measuredangle LAB'' = \measuredangle B'AB''$. Wynika stąd, że

$$\measuredangle BAB'' = \measuredangle BAB' + \measuredangle B'AB'' = 2 \cdot (\measuredangle KAB' + \measuredangle B'AL) = 2\measuredangle KAL = \alpha.$$

Skoro odbijaliśmy względem prostych przechodzących przez A, to $|BA| = |B''A|$. To łącznie dowodzi, że $B'' = O_A^\alpha(B)$. □

Wniosek 4 (o składaniu obrotów)**.** *Złożenie $O_B^\beta \circ O_A^\alpha$ jest:*

1. *Obrotem o kąt $\alpha + \beta$ wokół punktu X takiego, że*

$$\measuredangle XAB = \frac{\alpha}{2} \text{ oraz } \measuredangle XBA = -\frac{\beta}{2},$$

jeżeli $\alpha + \beta \neq 0$, przypominam, że to równość z dokładnością do $360°$.

2. *Przesunięciem o wektor, jeżeli $\alpha + \beta = 0°$.*

Dowód. Jeżeli $A = B$ to teza zachodzi trywialnie.

Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkty A, B. Niech k będzie taką prostą, że kąt pomiędzy k i l to $\frac{\alpha}{2}$, niech m będzie taką prostą, że kąt pomiędzy l i m jest równy $\frac{\beta}{2}$.

Korzystamy dwukrotnie z twierdzenia i otrzymujemy

$$O_A^\alpha = S_l \circ S_k,\ O_B^\beta = S_m \circ S_l,\ \text{zatem } O_B^\beta \circ O_A^\alpha = S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_k.$$

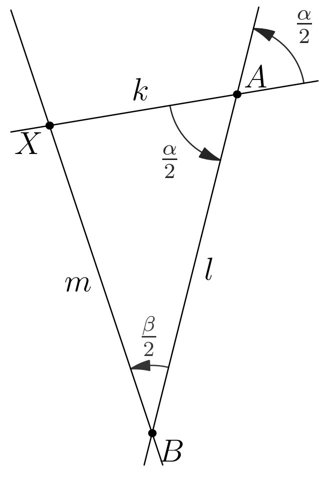
Zauważmy, że przekształcenie $S_l \circ S_l$ to dwukrotne odbicie względem tej samej prostej, czyli identyczność. Stąd $S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_k = S_m \circ S_k$.

Zauważmy, że proste k, m są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy tworzą takie same kąty z l, czyli gdy (kąty skierowane!) $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$, czyli $\alpha + \beta = 0°$. Jeżeli m i k są równoległe, to $S_m \circ S_k$ jest translacją, więc w tym przypadku teza wniosku zachodzi.

Zakładamy dalej, że $\alpha+\beta \neq 0°$, czyli k, m nie są równoległe. Niech X będzie punktem przecięcia k i m.

Ponownie korzystamy z twierdzenia i stwierdzamy, że $S_m \circ S_k$ jest obrotem wokół X o kąt $2 \cdot \measuredangle AXB = \alpha + \beta$.

Ponadto $\measuredangle XBA = -\measuredangle ABX = -\frac{\beta}{2}$ oraz $\measuredangle XAB = \frac{\alpha}{2}$. To kończy dowód w tym przypadku. □



Przykład 5. *Standardowy sposób rozwiązywania zadań przy pomocy obrotów jest następujący:*

1. *Rozważamy złożenie obrotów wokół pewnych punktów A i B.*
2. *Znajdujemy punkty C i D takie, że D jest obrazem C w tym złożeniu.*
3. *Na postawie punktów C i D wyznaczamy środek obrotu O.*
4. *Na podstawie wniosku znamy kąty $\measuredangle OAB, \measuredangle OBA$.*

Poniżej przykład zadania rozwiązanego tym sposobem.

Przykład 6 (Przykład zadania)**.** *Na ścianach trójkąta $\triangle ABC$ budujemy, po zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne. Udowodnij, że środki ciężkości tych trójkątów tworzą trójkąt równoboczny.*

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez M_1, M_2, M_3 środki ciężkości trójkątów zbudowanych na bokach BC, CA, AB odpowiednio. Ewentualnie odbijając symetrycznie, możemy założyć, że $\measuredangle BM_1C = 120°$. Wtedy $\measuredangle CM_2A = \measuredangle AM_3B = 120°$. Zauważmy, że

$$O_{M_1}^{120°}(B) = C,\ O_{M_2}^{120°}(C) = A,\ O_{M_3}^{120°}(A) = B. \text{ stąd } O_{M_2}^{120°} \circ O_{M_1}^{120°}(B) = A.$$

Z wniosku wynika, że $O_{M_2}^{120°} \circ O_{M_1}^{120°} = O_X^{240°}$, przy czym $\sphericalangle XM_1M_2 = \sphericalangle XM_2M_1 = 60°$ (uwaga: kąty nieskierowane), czyli $\triangle XM_2M_1$ jest równoboczny.

Z kalkulacji $O_X^{240°}(B) = O_{M_2}^{120°} \circ O_{M_1}^{120°}(B) = A$ wynika jednak, że $X = M_3$ (gdyż $|M_3A| = |M_3B|$ i $\measuredangle BM_3A = -\measuredangle AM_3B = 240° = \measuredangle BXA$), więc $\triangle M_1M_2M_3$ jest równoboczny.

Definicja 7. *Figury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są* zgodnie zorientowane*, jeżeli są podobne, a ich odpowiadające sobie kąty zorientowane mają równe miary.*

W dwóch pierwszych zadaniach nie potrzeba używać składania obrotów.

Zadanie OL IZO.1

Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC i jest $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$. P' jest takie, że trójkąt $\triangle APP'$ jest zgodnie zorientowany z $\triangle ABC$. Udowodnij, że $PP'C = 90°$.

Zadanie OL IZO.2

Na płaszczyźnie dane są 2 trójkąty równoboczne zgodnie zorientowane ABC i CDE (mające wspólny wierzchołek C) oraz punkty F i G takie, że $AD = AF$, $BE = BG$ i $\measuredangle DAF = \measuredangle EBG$. Wykaż, że trójkąt $\triangle CFG$ jest równoboczny.

Zadanie OL IZO.3

Dane są rozłączne oprócz punktu C, zgodnie zorientowane kwadraty $ACMN$ i $KLCB$ o środkach P i R odpowiednio. Niech Q, S będą środkami odcinków AB, ML. Wykaż, że $PQRS$ jest kwadratem.

Zadanie OL IZO.4

Dane są punkty A, B, C, D tworzące czworokąt wypukły. Punkt P jest taki, że $|AP| = |BP|$, $|CP| = |DP|$ oraz $APB = CPD = 90°$. Udowodnij, że $|AC| = |BD|$ i $AC \perp BD$. Przy okazji: jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, żeby przekątne w czworokącie przecinały się pod kątem prostym?

Zadanie OL IZO.5

Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty prostokątne równoramienne $\triangle ABP, \triangle BCQ, \triangle CDR, \triangle DAS$, z kątami prostymi przy wierzchołkach P, Q, R, S odpowiednio. Udowodnij, że $PR \perp QS$.

Zadanie OL IZO.6

Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ i jest taki, że $\triangle ADP$ i $\triangle BCP$ są równoboczne. Na bokach AB i CD zbudowano, po zewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne $\triangle ABL$ i $\triangle CDM$. Udowodnij, że P jest środkiem odcinka LM.

Zadanie OL IZO.7

Po zewnętrznej stronie boków AB i BC trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne $\triangle ABP$ i $\triangle BCQ$, z kątami prostymi przy wierzchołkach P i Q. Udowodnij, że jeżeli M - środek boku AC, to trójkąt MPQ jest też równoramienny prostokątny.

Zadanie OL IZO.8

Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90°$. Udowodnij, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów, znając miarę α kąta $\sphericalangle ACE$ i miarę β kąta $\sphericalangle BEC$.

Zadanie OL IZO.9

Punkt C jest środkiem odcinka AB. Okrąg o_1 przechodzący przez A, C przecina okrąg o_2 przechodzący przez B, C w różnych punktach C, D. Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1, który nie zawiera C. Punkt Q jest środkiem tego łuku BD okręgu o_2, który nie zawiera C. Dowiedź, że $CD \perp PQ$.

7.4 Wzory pozornie trywialne

Obserwacja 1 (Podstawowa obserwacja ☺)**.** *$a = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b = 0$.*

Obserwacja 2. *$a \equiv b \mod n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b \equiv 0 \mod n$.*

Umowa: reszty z dzielenia przez X (skrótowo reszty $\mod X$) to liczby $0, 1, \ldots, X-1$. Resztę z dzielenia przez X liczby s będziemy oznaczać $s \mod X$.

Przykład 3. *Przykładowo $2 \mod 7$ to po prostu 2, $10 \mod 7$ to po prostu 3.*

Zachodzi sensowna oczywistość: $a \mod n = b \mod n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv b \mod n$, dla każdego n całkowitego dodatniego.

Cel wykładu: liczby k, l są względnie pierwsze, chcemy określić zależności pomiędzy resztami $\mod k$, $\mod l$, $\mod k \cdot l$, a konkretniej pokazać, że reszty $\mod k$, $\mod l$ mogą być wybrane niezależne (cokolwiek to znaczy). Dla wygody definiujemy $n := kl$.

Kluczowe w całym wykładzie jest spostrzeżenie, że jeżeli znamy resztę z dzielenia a przez 6 to znamy też resztę z dzielenia a przez 2 i 3; ogólniej: jeżeli znamy resztę z dzielenia przez kl to znamy też reszty z dzielenia przez k i l.

Lemat 4. *$a \equiv b \mod k$ i $a \equiv b \mod l$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv b \mod kl$.*

Dowód. $\Leftarrow$ Jeżeli a i b dają taką samą resztę z dzielenia przez kl, to i przez k i l.

$\Rightarrow$ Jeżeli $a \equiv b \mod k$, to $k \big| a-b$, analogicznie $l \big| a-b$. Skoro k, l są względnie pierwsze to znaczy to, że $kl \big| a-b$. To zaś mówi dokładnie tyle, że $a \equiv b \mod kl$. □

7.4.1 Przygotowanie

Twierdzenie 5 (Chińskie twierdzenie o resztach)**.** *Niech $k, l \in \mathbb{Z}_+$ będą względnie pierwsze, $n := k \cdot l$.*

Jeżeli r_k, r_l są resztami $\mod k$, $\mod l$ odpowiednio, to istnieje dokładnie jedno r_n — reszta $\mod n$ taka, że

$$r_n \equiv r_k \mod k, \quad r_n \equiv r_l \mod l.$$

Dowód. Rozważmy wszystkie reszty $\mod n$. Jest ich dokładnie $k \cdot l$. Każdej reszcie $r \mod n$ możemy przypisać parę reszt $\big(r \mod k, r \mod l\big)$.

Z lematu wynika, że jeżeli $r \mod k = s \mod k, r \mod l = s \mod l$, to $r \mod n = s \mod n$; prościej mówiąc otrzymujemy różne pary reszt.

Par reszt $\mod k$, $\mod l$ jest $k \cdot l$, a reszt $\mod n$ jest $n = k \cdot l$. Podane wyżej przyporządkowanie przypisuje każdej z n liczb inną z n par, więc otrzymana jest każda z n par, a to jest dokładnie teza, którą mieliśmy dowieść. □

Wnioskiem jest następująca obserwacja:

Obserwacja 6. *Jeżeli znamy reszty $\mod k$ i $\mod l$ liczby, to znamy też jej resztę $\mod n$; znajomość reszt $\mod k$, $\mod l$ jest równoważna ze znajomością reszty $\mod n$.*

Intuicja: jeżeli chodzi o dodawanie, to zbiór liczb podzielnych przez m wygląda tak samo, jak zbiór liczb naturalnych.

Zadanie OL TL.1

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią.

Udowodnij, że zbioru liczb całkowitych dodatnich nie mniejszych od n nie da się podzielić na dwa podzbiory N_1, N_2 takie, że jeżeli $a, b \in N_1$, to $a+b \notin N_1$ oraz jeśli $a, b \in N_2$ to $a+b \notin N_2$. *Uwaga: Nie zakładamy tutaj $a \neq b$.*

7.4.2 Pierwiastki

Zajmiemy się teraz znajdowaniem pierwiastków wielomianu $\mod n$. Formalnie:

Definicja 7. ***Reszta*** *a jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$, jeżeli $f(a) \mod n = 0$, innymi słowy $f(a) \equiv 0 \mod n$.*

Przykład 8 (Trywialny przykład). *Znajdź liczbę pierwiastków funkcji* $f(x) = x - 1 \mod 15$.

Rozwiązanie: jedyną resztą r *taką, że* $r - 1 \equiv 0 \mod 15$ *jest* 1, *więc jest jeden pierwiastek.*

Przykład 9. *Znajdź liczbę pierwiastków funkcji* $f(x) = x^2 - 1 \mod 15$.

Rozwiązanie.

Oczywiście można to policzyć (gorzej, gdyby zamiast 15 *było* n*).*

Zróbmy inaczej. Popatrzmy, ile jest pierwiastków funkcji $f(x) \mod 3$.

Liczba 3 *jest pierwsza, więc* $3 \big| x^2 - 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $3 \big| x - 1$ *lub* $3 \big| x + 1$. *Są więc dwa rozwiązania:* $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Równanie $x^2 - 1 \mod 5$ *ma również dwa rozwiązania:* $y_1 = 1, y_2 = 4$.

Rozważmy parę $(x_1 = 1, y_2 = 4)$. *Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje reszta* $r \mod 15$ *taka, że*

$$r \equiv x_1 \mod 3 \text{ i } r \equiv y_2 \mod 5$$

Zauważmy, że

$$r^2 \equiv x_1^2 \equiv 1 \mod k \quad r^2 \equiv y_2^2 \equiv 1 \mod l, \text{ zatem } r^2 \equiv 1 \mod n$$

Otrzymaliśmy pierwiastek funkcji $f(x) \mod 15$*!*

Podobnie postępując dla par $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ *otrzymujemy jeszcze* 3 *pierwiastki* $f(x) \mod 15$.

Z drugiej strony, jeżeli $r \mod 15$ *jest pierwiastkiem* $f(x) \mod 15$, *to* $r \mod 3$ *jest pierwiastkiem* $f(x) \mod 3$ *i* $r \mod 5$ *jest pierwiastkiem* $f(x) \mod 5$, *więc powyżej otrzymaliśmy wszystkie pierwiastki* $f(x) \mod 15$.

Odpowiedź: $f(x) \mod 15$ *ma* 4 *pierwiastki.*

Wnioskiem z poprzedniego przykładu jest

Twierdzenie 10. *Załóżmy, że* k, l *są względnie pierwsze i* $n = k \cdot l$.

Załóżmy, że $f(x) \mod k$ *ma* M_k *pierwiastków oraz* $f(x) \mod l$ *ma* M_l *pierwiastków. Wtedy* $f(x) \mod n$ *ma dokładnie* $M_k \cdot M_l$ *pierwiastków.*

Zadanie OL TL.2

Ile jest cyfr $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ takich, że ostatnią cyfrą liczby a^2 jest a?

Zadanie OL TL.3

Ile jest liczb całkowitych nieujemnych a mniejszych od 10^{1000} takich, że

$$a^2 \equiv a \mod 10^{1000} \text{ ?}$$

Zadanie OL TL.4

Ile jest liczb całkowitych nieujemnych a mniejszych od 105 takich, że

$$a^3 \equiv a \mod 105 \text{ ?}$$

Rozdział 8

Wskazówki

8.1 Pochodne

Wskazówka OL DIFF.1

1. $42x^5 + 12x^2 + 2x + 2$
2. $\frac{5}{2\sqrt{x}}$
3. $-\frac{2}{x^3}$
4. $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$
5. $16x^7 - 28x^6 + 12x^5 + 51x^2 - 68x + 17$
6. $\frac{2x^2-12x-9}{(x-3)^2}$
7. $13\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12}$
8. $-2\sin 2x$
9. $2\sin x\cos x = \sin 2x$
10. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
11. $3e^{3x}$
12. $e^x(\sin x + \cos x)$
13. $\frac{4}{x}$
14. $\frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$
15. $6x \cdot \ln 2 \cdot 2^{3x^2}$
16. $x^x(1 + \ln x)$

Wskazówka OL DIFF.2

1. Minimum w $x = -\frac{5}{6}$.
2. Minimum w $x = -1$, $x = 2$, maksimum w $x = 1$.
3. Brak ekstremów.
4. Minimum w $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, maksimum w $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Wskazówka OL DIFF.3

Korzystając ze wzoru na objętość walca, zapiszmy jego pole powierzchni w zależności od promienia: $V = \pi r^2 H = 250\pi \Rightarrow P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r H = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$. Teraz wystarczy znaleźć minimum tej funkcji.

Wskazówka OL DIFF.4

Rozpatrujemy funkcję $x - \sin x$. Na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jest ona rosnąca, w zerze ma wartość 0, zatem na całym przedziale jest nieujemna.

Wskazówka OL DIFF.5

Badając pochodną funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, łatwo dowieść, że funkcja ta jest malejąca na przedziale $(e, +\infty)$.

Wskazówka OL DIFF.6

Należy pokazać, że wykres funkcji $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 3$ tylko raz przecina oś OX. Aby to dowieść, badamy pochodną funkcji i pokazujemy, że wartości funkcji w minimum i maksimum lokalnym są ujemne.

Wskazówka OL DIFF.7

Znajdźmy ekstrema funkcji $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + k$. Aby wykres funkcji 4 razy przecinał oś OX, wartości w minimach muszą być ujemne, a w maksimach dodatnie. W ten sposów otrzymamy 3 ograniczenia na wartość liczby k.

8.2 Nierówność Jensena

Wskazówka OL JEN.1

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wypukłej x^2 i argumentów a, b, c z wagami $\frac{1}{3}$.

Wskazówka OL JEN.2

Podzielmy lewą stronę nierówności przez $a + b + c$ i zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wypukłej x^2 i argumentów a^2, b^2, c^2 z wagami $\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$.

Wskazówka OL JEN.3

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji $\sin x$ wklęsłej na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i argumentów x, y, z z wagami $\frac{1}{3}$.

Wskazówka OL JEN.4

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wypukłej $\operatorname{tg}^2 x$ i argumentów $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ z wagami $\frac{1}{3}$.

Wskazówka OL JEN.5

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wklęsłej $\sqrt[3]{x}$ i argumentów $3+\sqrt[3]{3}, 3-\sqrt[3]{3}$ z wagami $\frac{1}{2}$.

Wskazówka OL JEN.6

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wklęsłej $\frac{3x+1}{x+1} = 3-\frac{2}{x+1}$ i argumentów x, y, z z wagami $\frac{1}{3}$.

Wskazówka OL JEN.7

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wklęsłej $\sqrt{(1-x)(1+x)}$ i argumentów a, b, c z wagami $\frac{1}{3}$.

Wskazówka OL JEN.8

Zastosujmy nierówność Jensena do funkcji wklęsłej $\sqrt{x}$ i argumentów $y+z, x+z, x+y$ odpowiednio z wagami $\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}$.

8.3 Izometrie

Wskazówka OL IZO.1

Rozważmy obrót wokół A, przenoszący B na C. Przenosi on również P na P'. Teza wynika teraz z twierdzenia Pitagorasa.

Wskazówka OL IZO.2

Rozważmy obrót wokół C, przenoszący A na B. Przenosi on również D na E, stąd $|AD| = |BE|$. Oznaczmy przez F' obraz punktu F. Sprawdź, że F' spełnia warunki punktu G, więc $F' = G$.

Wskazówka OL IZO.3

Rozważ obrót wokół P przekształcający A na C i obrót wokół R przekształcający C na B. Udowodnij, że ich złożeniem jest obrót wokół Q i skorzystaj z wniosku.

Wskazówka OL IZO.4

Do pierwszej części zadania: obróć wokół P.

Warunek na to, żeby przekątne przecinały się pod kątem prostym to $a^2+c^2 = b^2+d^2$, gdzie a, b, c, d to kolejne długości boków. Najszybszy dowód korzysta z twierdzenia cosinusów lub szacowania z twierdzenia Pitagorasa.

Wskazówka OL IZO.5

Rozważ złożenie obrotów wokół P, Q przerzucające A na C i takież złożenie obrotów wokół R i S. Skorzystaj z poprzedniego zadania.

Wskazówka OL IZO.6

Rozważ złożenie obrotu wokół A przekształcającego L na B, obrotu wokół P przekształcającego B na C oraz obrotu wokół D przekształcającego C na M.

Mozolnie, korzystając z wniosku, dowiedź, że środkiem obrotu równego ww. złożeniu jest P.

Wskazówka OL IZO.7

Dostosuj rozwiązanie zadania o trójkątach prostokątnych równoramiennych zbudowanych na bokach czworokąta.

Wskazówka OL IZO.8

Niech M będzie środkiem boku AB. Zastosuj poprzednie zadanie i udowodnij, że $\triangle ECM$ jest prostokątny równoramienny.

Obrót o $180°$ wokół M przenosi A na B i daje się zapisać jako złożenie symetrii względem prostej MC z symetrią względem ME. Niech $K = S_{MC}(A)$. Udowodnij, że $\triangle EKC$ jest szukanym trójkątem.

Wskazówka OL IZO.9

Udowodnij, że $\sphericalangle BQD + \sphericalangle DPA = 180°$, rozważ odpowiednie złożenie obrotów przekształcające $B \to D \to A$ i stwierdź, że jest ono obrotem wokół C o $180°$. Wylicz stąd kąty w $\triangle PQC$.

8.4 Wzory pozornie trywialne

Wskazówka OL TL.1

Rozważ na początku $n = 1$ i liczby $1, 2, 3, 4, 5$.

W ogólnym przypadku rozważ liczby $n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n$.

Wskazówka OL TL.2

Można policzyć bezpośrednio, że są to $0, 1, 5, 6$.

Można też zbadać, że są dokładnie dwa rozwiązania $x^2 \equiv x \mod p$ o ile p jest pierwsze.

Wskazówka OL TL.3

Trzeba zbadać, że są dokładnie dwa rozwiązania $x^2 \equiv x \mod p^k$ o ile p jest pierwsze, a k całkowite dodatnie.

Skoro $10^{1000} = 2^{1000} \cdot 5^{1000}$, to znaczy, że są cztery rozwiązania.

Wskazówka OL TL.4

Podobnie jak w poprzednich zadaniach sprawdzamy, że jeżeli $p > 2$ jest pierwsza, to $x^3 \equiv x \mod p$ ma 3 rozwiązania $\mod p$.

Wiemy, że $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, jest więc 27 rozwiązań.

Źródła zadań

[1] Ćwiczenia z analizy matematycznej I, prowadzone na MIM UW przez dra Marcina Kuczmę,

[2] Koło matematyczne UMK w Toruniu `http://www-users.mat.umk.pl/~kolka/`,

[3] Koło matematyczne XIV LO im. Staszica w Warszawie `http://wm.staszic.waw.pl/`,

[4] Matematyczne Igrzyska Dolnej Wisły `http://www-users.mat.umk.pl/~kolka/igrzyska.html`,

[5] Obóz matematyczny OM w Zwardoniu `http://www.om.edu.pl/`,

[6] Polska Olimpiada Matematyczna `http://www.om.edu.pl`,

[7] Portal Art of Problem Solving `http://www.mathlinks.ro/`,

[8] Śląski Konkurs Matematyczny, `http://skm.katowice.pl/`,

[9] Środkowo–Europejska Olimpiada Matematyczna,

[10] Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne `http://warsztatywww.wikidot.com/`.