Joachim Jelisiejew
Aleksandra Baranowska   Mateusz Jocz

I Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza
w Białymstoku
Podlaskie Stowarzyszenie na Rzecz Uzdolnionych

III Obóz Naukowy PROSERWY
Część matematyczna

Kadra matematyczna:
Aleksandra Baranowska
Iwona Bujnowska
Joachim Jelisiejew (koordynator)
Mateusz Jocz

Główni organizatorzy:
Iwona Bujnowska
Ireneusz Bujnowski
Joachim Jelisiejew
Jacek Tomasiewicz

Serwy, 19 – 25 września 2010
(wydanie drugie)

Spis treści

Część I

Grupa średnio zaawansowana

Rozdział 1

Zadania

PROSERWY 2010
obóz informatyczno - matematyczny

1.1 Dzień I

ŚR 1.1
Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, zaś punkty K, L, M odpowiednio środkami łuków BC, AC, AB okręgu na nim opisanego, niezawierających przeciwległych wierzchołków. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punktem przecięcia wysokości trójkąta KLM.

ŚR 1.2
Ciąg liczb całkowitych $(b_1, b_2, ..., b_{2009})$ jest permutacją ciągu $(a_1, a_2, ..., a_{2009})$. Wykaż, że iloczyn

$$(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_{2009} - b_{2009})$$

jest liczbą parzystą.

ŚR 1.3
Rozwiąż równanie $2^x + 2^y = 2^z$ w liczbach całkowitych dodatnich.

1.2 Dzień II

ŚR 2.1
Jaka jest maksymalna liczba kątów ostrych w wielokącie wypukłym?

ŚR 2.2
Pokaż, że w każdym trójkącie zachodzi

$$\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r},$$

gdzie r to promień okręgu wpisanego, a h_1, h_2 to dowolne różne wysokości trójkąta.

ŚR 2.3
Pewna potęga liczby całkowitej x jest podzielna przez liczbę naturalną n. Uzasadnij, że istnieje takie a całkowite, że $(1 - x)a$ daje resztę 1 z dzielenia przez n.

1.3 Dzień III

ŚR 3.1
Trzy odcinki o długości 1 przecinają się w jednym punkcie. Końce tych odcinków są wierzchołkami sześciokąta. Rozstrzygnij, czy jego obwód może być większy od 6.

ŚR 3.2
Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba $n^4 + 4$ jest pierwsza.

ŚR 3.3
W pewnym turnieju wystąpiło n drużyn, grano systemem "każdy z każdym", bez remisów. Udowodnij, że jeżeli pewne dwie drużyny wygrały taką samą liczbę spotkań, to można wybrać takie trzy drużyny A, B, C, że A wygrała z B, B z C, C z A.

1.4 Dzień IV

ŚR 4.1
Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b, przeciwprostokątnej c i wysokości h opuszczonej z wierzchołka przy kącie prostym spełniona jest nierówność $c + h > a + b$.

ŚR 4.2
Dany jest kwadrat $2^n \times 2^n$ z wyciętym kwadratem jednostkowym. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy dla każdego położenia wyciętego kwadratu można wypełnić ten kwadrat klockami w kształcie litery L – dwa kwadraciki z jednym doklejonym obok.

ŚR 4.3
Znajdź wszystkie liczby pierwsze takie, że $2^p + p^2$ jest również liczbą pierwszą.

1.5 Dzień V

ŚR 5.1
Dane mamy liczby rzeczywiste a, b, c. Wiedząc, że $a + b + c = 0$ oraz $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, oblicz $a^4 + b^4 + c^4$.

ŚR 5.2
Udowodnij, że na płaszczyźnie ze standardowym układem współrzędnych nie istnieje trójkąt równoboczny o wszystkich wierzchołkach mających współrzędne całkowite.

ŚR 5.3
Niech $\mathcal{S}$ będzie podzbiorem $[0, 1]$ złożonym ze skończonej liczby przedziałów. Udowodnij, że jeżeli suma długości tych przedziałów jest większa niż 0.6, to $\mathcal{S}$ zawiera dwie liczby, których różnica wynosi dokładnie 0.1.

1.6 Mecz matematyczny

ŚR M.1
W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD, BE, CF przecinają się w punkcie H. Uzasadnij, że H jest środkiem okręgu wpisanego w DEF.

ŚR M.2
W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek AD jest wysokością, a punkty E, F rzutami punktu D odpowiednio na boki AB i AC. Dowiedź, że na czworokącie $BCFE$ da się opisać okrąg.

ŚR M.3
Ile maksymalnie elementów może mieć $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2010 + 1\}$ mający następującą własność:

$$\text{nie istnieją } x, y, z \in A \text{ takie, że } x + y = z$$

ŚR M.4
Niech $x, y > 1$ będą liczbami całkowitymi takimi, że $NWD(x, y) = 1$. Udowodnij, że jeżeli n jest parzystą liczbą naturalną, to $x + y$ nie dzieli $x^n + y^n$.

ŚR M.5
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku A. Wykaż, że zachodzi zależność: $AC^2 = BC(AB + BC)$.

ŚR M.6
Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $n^2 + 3n + 5$ nie jest podzielna przez 121.

ŚR M.7
Udowodnij, że nie istnieje takie całkowite dodatnie m, że $m(m+1)$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku nie mniejszym niż 2.

ŚR M.8
Niech α, β, γ będą kątami pewnego trójkąta, a a, b, c długościami boków leżących naprzeciwko α, β, γ odpowiednio. Wykaż, że prawdziwe są nierówności:

$$60^\circ \leqslant \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} < 90^\circ$$

ŚR M.9
Dany jest $2n$-kąt foremny, $n \geqslant 2$. Yogi i Mateusz grają w następującą grę: na zmianę rysują przekątne tego wielokąta, ale tak, by nie miały punktów wspólnych z dotychczas narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten, który nie może narysować już żadnej przekątnej. Zaczyna Yogi, który z graczy ma strategię wygrywającą?

ŚR M.10
Niech liczby a, b, c będą dodatnie. Uzasadnij, że

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c.$$

1.7 Trudniejsze

ŚR T.1
Pokaż, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b istnieją takie liczby całkowite c, d, że

$$c^2 + d^2 = 13(a^2 + b^2).$$

ŚR T.2
W czworokącie $ABCD$ punkty M, N, K, L są odpowiednio środkami boków CD, DA, AB, BC.

Wykaż, że

$$NL + MK \leqslant \frac{AB + BC + CD + DA}{2}.$$

ŚR T.3
Liczby rzeczywiste dodatnie x, y spełniają $(1 + x)(1 + y) = 2$. Udowodnij nierówność

$$xy + \frac{1}{xy} \geqslant 6.$$

ŚR T.4
Danych jest 13 odcinków, których długości są całkowite. Uzasadnij, że jeśli długości wszystkich odcinków nie przekraczają 200, to z pewnych 3 odcinków da się zbudować trójkąt. Czy pozostanie to prawdą, jeżeli zamiast 13 byłoby 12 odcinków?

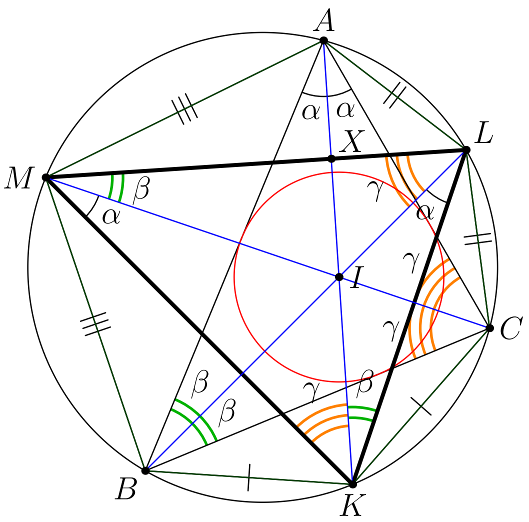
Rozdział 2

Rozwiązania

PROSERWY 2010
obóz informatyczno - matematyczny

2.1 Dzień I

Rozw ŚR 1.1



Zauważmy, że skoro punkty K, L, M są odpowiednio środkami łuków BC, AC, AB, to proste AK, BL, CM są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC, przecinają się zatem w punkcie będącym środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wystarczy zatem udowodnić, że proste AK, BL, CM zawierają wysokości trójkąta KLM.

Rozpatrzmy kąty w trójkącie KLM. Oznaczmy jako α kąt BLK. Łuki BK i KC są równe, zatem również $\sphericalangle KMC = \alpha$. Analogicznie otrzymamy $\sphericalangle BLM = \sphericalangle MKA = \gamma$ oraz $\sphericalangle AKL = \sphericalangle LMC = \beta$. Suma kątów w trójkącie KLM wynosi $2(\alpha + \beta + \gamma)$, zatem $\alpha + \beta + \gamma = 90°$.

Oznaczmy jako X punkt przecięcia prostych AK i ML. Suma miar kątów w trójkącie KXL wynosi $\alpha + \beta + \gamma + \sphericalangle KXL$. Kąt KXL jest więc prosty, zatem istotnie prosta AK zawiera wysokość trójkąta KLM. Analogicznie przeprowadzamy dowód dla prostych BL i CM.

Rozw ŚR 1.2

Niech P będzie ilością liczb parzystych wśród $a_1, \ldots, a_{2009}$, a NP – nieparzystych.

Skoro $P + NP = 2009$, to jedna z tych liczb jest nie większa niż 1004.

Zastanówmy się, ile może być maksymalnie par (a_i, b_i) takich, że a_i i b_i nie są tej samej parzystości.

Para (a_i, b_i) liczb o różnej parzystości, zawiera jedną liczbę parzystą i jedną nieparzystą, a wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{2009}, b_1, b_2, \ldots, b_{2009}$ jest dokładnie $2 \cdot P$ parzystych i $2 \cdot NP$ nieparzystych, więc może być najwyżej $\min(2 \cdot P, 2 \cdot NP) \leqslant 2008 < 2009$ takich par. Powstanie więc przynajmniej jedna para liczb o tej samej parzystości.

Jako że liczby o tej samej parzystości dają parzystą różnicę, cały iloczyn $(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_{2009} - b_{2009})$ jest liczbą parzystą.

Rozw ŚR 1.3

Jeżeli (x, y, z) spełniają dane równanie to $2^z > 2^x, 2^y$, zatem $z > x, y$, czyli $z - 1 \geqslant x, y$. Wtedy jednak

$$2^z = 2 \cdot 2^{z-1} = 2^{z-1} + 2^{z-1} \geqslant 2^x + 2^y$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $x = y = z - 1$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania są trójki $(n, n, n + 1)$, gdzie n jest całkowite dodatnie.

2.2 Dzień II

Rozw ŚR 2.1

Oznaczmy przez m liczbę kątów ostrych wielokąta, a przez n liczbę wszystkich kątów. Wiemy, że suma miar kątów w wielokącie mającym n kątów wynosi $180° \cdot (n-2)$. Zatem prawdziwe jest:

$$180° \cdot (n-2) = \text{ suma kątów ostrych } + \text{ suma } n-m \text{ pozostałych kątów} < m \cdot 90° + (n-m) \cdot 180°,$$

która to nierówność jest równoważna kolejno nierównościom:

$$-360° < -90° \cdot m$$

$$m < 4$$

$$m \leqslant 3$$

Zauważmy, że trójkąt ostrokątny ma trzy kąty ostre, więc największą liczbą kątów ostrych wielokąta wypukłego jest liczba 3.

Rozw ŚR 2.2

Niech a, b będą długościami boków trójkąta, na które opuszczone są wysokości h_1, h_2 odpowiednio, c będzie długością trzeciego boku trójkąta, a S polem tego trójkąta.

Okrąg wpisany w trójkąt jest styczny do wszystkich jego boków, więc pole trójkąta możemy zapisać jako sumę trzech trójkątów o podstawach odpowiednio a, b, c i wysokości r: $S = \frac{(a+b+c)r}{2}$, skąd $r = \frac{2S}{a+b+c}$. Oczywiście $S = \frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2}$, więc $h_1 = \frac{2S}{a}, h_2 = \frac{2S}{b}$.
Podstawiamy r, h_1, h_2 do nierówności:

$$\frac{a+b+c}{4S} < \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} < \frac{a+b+c}{2S}$$

$$a+b+c < 2a+2b < 2a+2b+2c.$$

Prawa nierówność jest oczywista, a odejmując od lewej stronami wyrażenie $a+b$, otrzymujemy nierówność trójkąta: $c < a+b$.

Rozw ŚR 2.3
Załóżmy, że k jest takie, że $n|x^k$.

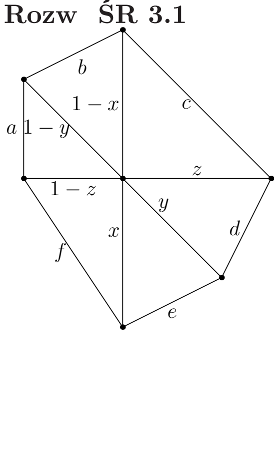
Zauważmy, że

$$(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = 1^k - x^k \equiv 1 \mod n$$

Zatem liczba $a = 1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}$ spełnia warunki zadania.

2.3 Dzień III

Rozw ŚR 3.1



Zapiszmy sześciokrotnie nierówność trójkąta z oznaczeniami jak na rysunku:

$$a \leqslant (1-y)+(1-z) \quad b \leqslant (1-x)+(1-y) \quad c \leqslant (1-x)+z$$

$$d \leqslant y+z \quad e \leqslant x+y \quad f \leqslant (1-z)+x$$

Dodając nierówności stronami otrzymujemy:

$$a+b+c+d+e+f \leqslant 6.$$

Widzimy zatem, że obwód danego sześciokąta nie może być większy niż 6.

Rozw ŚR 3.2
Zauważmy, że

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$$

Jeżeli $n > 1$ to każda z tych liczb jest większa od 1, zatem $n^4 + 4$ nie jest pierwsze.

Dla $n = 1$ liczba $1^4 + 4 = 5$ jest pierwsza.

Rozw ŚR 3.3

Niech drużyny X i Y będą tymi, które wygrały po k spotkań, przegrały zatem po $n - k - 1$.

Po ewentualnej zamianie nazw możemy założyć, że drużyna X wygrała z drużyną Y. Wśród spotkań z pozostałymi drużynami X ma $k-1$ wygranych i $n-k-1$ przegranych, Y natomiast k wygranych i $n - k - 2$ przegranych.

Zauważmy, że zbiory drużyn, z którymi drużyna Y wygrała i X przegrała, nie mogą być rozłączne, gdyż $k + (n - k - 1) = n - 1 > n - 2$. Istnieje zatem drużyna Z, która wygrała z X i przegrała z Y. Drużyny X, Y, Z są szukanymi drużynami.

2.4 Dzień IV

Rozw ŚR 4.1

Zauważmy, że pole trójkąta możemy tu zapisać na dwa sposoby: $P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$.

Teza jest równoważna nierówności $(c + h)^2 > (a + b)^2$, gdyż rozpatrywane przez nas wartości są dodatnie.

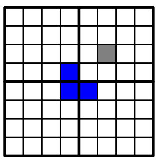
Zauważmy, że $(a+b)^2 = (a^2+b^2)+2ab$, co na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz zależności między polami równe jest $c^2 + 2ch = (c + h)^2 - h^2$. Zachodzi zatem $(a + b)^2 < (c + h)^2$, czyli teza.

Rozw ŚR 4.2

Pokażmy, że wypełnienie takie jest zawsze możliwe przez indukcję względem n.

Jeżeli $n = 1$, czyli mamy do czynienia z kwadratem 2×2, to jest jasne, że można tak wypełnić — wystarczy odpowiednio ułożyć jeden klocek.

Załóżmy, że udowodniliśmy, że da się wypełnić każdy kwadrat o boku 2^{n-1} i chcemy teraz pokazać, jak wypełnić kwadrat o boku 2^n.



Podzielmy kwadrat $2^n \times 2^n$ z wyciętym polem na cztery przystające kwadraty i trzy pełne z nich połączmy klockiem, jak na rysunku (szare pole to wycięty kwadracik, a trzy niebieskie to klocek).
Otrzymujemy cztery kwadraty o boku 2^{n-1} z wyciętym jednym polem. Każdy z nich da się wypełnić klockami, a więc i cały kwadrat można wypełnić klockami.

Rozw ŚR 4.3
Po pierwsze przeliczamy, że dla $p = 2$ liczba $2^p + p^2 = 8$ nie jest pierwsza, a dla $p = 3$ liczba $2^p + p^2 = 17$ jest pierwsza.

Załóżmy teraz, że $p \neq 3$ i $p \neq 2$. Liczba p jest nieparzysta: $p = 2k + 1$ dla pewnego k całkowitego, więc

$$2^p = 2^{2k+1} = 4^k \cdot 2 \equiv 1^k \cdot 2 = 2 \mod 3$$

oraz $p^2 \equiv 1 \mod 3$, co sprawdzamy przeliczając dwie możliwe reszty p z dzielenia przez 3.

Łącznie

$$2^p + p^2 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \mod 3$$

i $2^p + p^2$ jest pierwsze, zatem $2^p + p^2 = 3$, ale $p > 2$, więc $2^p > 4$, sprzeczność.

Ostatecznie jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $p = 3$.

2.5 Dzień V

Rozw ŚR 5.1

Z danych zależności obliczyć możemy:

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)) = -\frac{1}{2}.$$

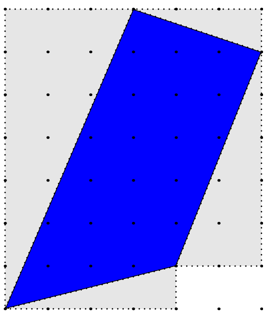
Zauważmy następnie, że $(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)$, a więc

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}.$$

Wreszcie $(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$, więc

$$1 = a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{2} \text{ czyli } a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}.$$

Rozw ŚR 5.2



Załóżmy, że taki trójkąt istnieje. Zauważmy, że jeżeli ma on bok a, to liczba a^2 jest liczbą całkowitą.
Wielokąt wypukły, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite ma pole postaci $\frac{1}{2}K$, gdzie K jest liczbą całkowitą. Faktycznie, jeżeli dobudujemy do boków trójkąty prostokątne, otrzymamy wielokąt o polu całkowitym, a dobudowywane trójkąty mają pola postaci $\frac{1}{2}\cdot$*liczba całkowita*, patrz rysunek.
A więc nasz trójkąt ma pole równe $\frac{1}{2}k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Z drugiej strony trójkąt równoboczny o boku a ma pole równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$:

$$\frac{1}{2}k = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{2k}{a^2} = \sqrt{3}$$

Stwierdziliśmy wcześniej, że a^2, k są liczbami całkowitymi. Z powyższego wzoru wynika więc, że $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, a to nieprawda. Sprzeczność.

Rozw ŚR 5.3
Dzielimy przedziały z $\mathcal{S}$ tak, by były one parami rozłączne i każdy z nich był zawarty albo w $[0, 0.9]$ albo w $[0.9, 1]$. Nie zmienia to sumy długości przedziałów.

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą tymi przedziałami z $\mathcal{S}$, które leżą w odcinku $[0, 0.9]$.

Oczywiście suma długości przedziałów $A_1, \ldots, A_n$ jest większa niż $0.6 - 0.1 = 0.5$.

Rozważmy przedziały przesunięte o 0.1:

$$A_1 + 0.1, A_2 + 0.1, \ldots, A_n + 0.1$$

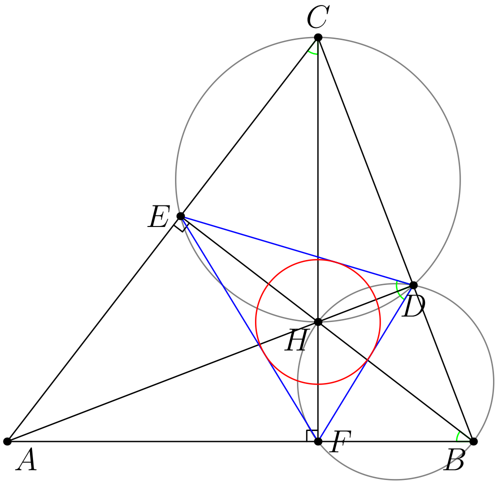
Gdyby którykolwiek z punktów tych przedziałów należał do przedziału z $\mathcal{S}$, to mielibyśmy tezę. Załóżmy zatem, że $A_1 + 0.1, \ldots, A_n + 0.1$ są rozłączne z $\mathcal{S}$.

Suma długości przedziałów $A_1 + 0.1, \ldots, A_n + 0.1$ jest taka sama jak suma długości $A_1, \ldots, A_n$, czyli większa od 0.5. Ale $A_1, \ldots, A_n \subseteq [0, 0.9]$, zatem $A_1 + 0.1, \ldots, A_n + 0.1 \subseteq [0, 1]$.

Odcinek $[0, 1]$ zawiera więc parami rozłączne przedziały $A_1, \ldots, A_n, A_1 + 0.1, \ldots, A_n + 0.1$ o sumie długości większej niż $0.5 + 0.5 = 1$. Sprzeczność.

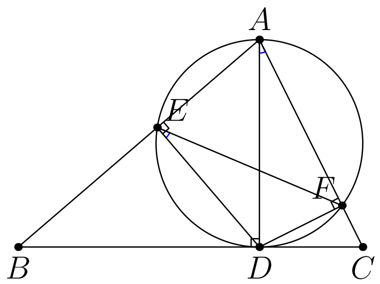
2.6 Mecz matematyczny

Rozw ŚR M.1



Mamy $\sphericalangle HEC = \sphericalangle HDC = 90°$, a więc $\sphericalangle HEC + \sphericalangle HDC = 180°$, czyli punkty H, E, C, D leżą na jednym okręgu.
Kąty $\sphericalangle HDE$ i $\sphericalangle HCE$ są oparte na tym samym łuku, ergo $\sphericalangle HDE = \sphericalangle HCE = 90° - \sphericalangle CAB$.
Analogicznie przeliczamy $\sphericalangle HDF = 90° - \sphericalangle CAB$, a więc $\sphericalangle HDF = \sphericalangle HDE$.
Identycznie argumentując $\sphericalangle HFE = \sphericalangle HFD$.
Punkt H jest środkiem okręgu wpisanego w DEF jako punkt przecięcia dwusiecznych kątów $\sphericalangle EDF$ i $\sphericalangle DFE$.

Rozw ŚR M.2



Zauważmy na początek, że $\sphericalangle AED + \sphericalangle AFD = 90° + 90° = 180°$, więc da się opisać okrąg na czworokącie $AEDF$.
Oznaczmy teraz kąt $\sphericalangle DAF$ jako α. Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku mamy $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DAF = \alpha$, więc $\sphericalangle BEF = \sphericalangle BED + \sphericalangle DEF = 90° + \alpha$.
Z sumy kątów w trójkącie ACD obliczamy $\sphericalangle ACD = 90° - \alpha$, zatem suma miar kątów $\sphericalangle BEF$ i $\sphericalangle BCF$ równa jest 180°, co jest warunkiem wystarczającym do tego, by na czworokącie $BCFE$ dało się opisać okrąg.

Rozw ŚR M.3
Taki zbiór może mieć maksymalnie 2011 elementów.

(a) Zbiór 2011-elementowy, mający zadane własności istnieje – jest to zbiór wszystkich liczb nieparzystych z $\{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2010 + 1\}$:

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2 \cdot 2010 + 1\}$$

Suma dwóch liczb z A jest liczbą parzystą, zatem nie należy do A.

(b) Załóżmy, że zbiór $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2010 + 1\}$ ma co najmniej 2012 elementów.
Niech a będzie najmniejszym elementem A. Rozważmy zbiór

$$A_{min} := \{b - a \mid b \in A, b \neq a\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 2010\}$$

Zbiór A_{min} ma $|A|-1$ elementów, więc A i A_{min} mają łącznie $2|A|-1 \geqslant 2\cdot 2012-1 > 2\cdot 2010+1$. Zbiory te muszą więc mieć element wspólny:

$$\text{istnieją } b, c \in A : \quad b - a = c$$

Elementy a, b, c zbioru A spełniają równość $a + c = b$, zatem zbiór A nie spełnia warunków zadania.

Rozw ŚR M.4

Załóżmy, że x, y spełniają warunki zadania oraz $x + y|x^{2k} + y^{2k}$ dla pewnego k całkowitego dodatniego.

Zastosujmy kongruencje $\mod x + y$. Bezpośrednio widać, że

$$x \equiv -y \mod x + y$$

Stąd

$$x^{2k} \equiv y^{2k} \mod x + y, \quad x^{2k} + y^{2k} \equiv 2y^{2k} \mod x + y$$

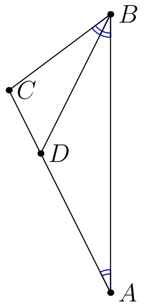
Z założenia $x + y|x^{2k} + y^{2k}$, czyli $x + y|2y^{2k}$.

Zauważmy, że $NWD(x + y, y^{2k}) = 1$.

Faktycznie, jeżeli liczba pierwsza p dzieli y^{2k}, to $p|y$, a jeżeli oprócz tego $p|x + y$, to $p|x$, czyli p jest wspólnym dzielnikiem x i y, ale $NWD(x, y) = 1 - x, y$ nie mają wspólnych dzielników. Sprzeczność.

Skoro $x + y|2y^{2k}$ i $NWD(x + y, y^{2k}) = 1$, to $x + y|2$. Ale $x + y > 1 + 1 = 2$. Sprzeczność.

Rozw ŚR M.5



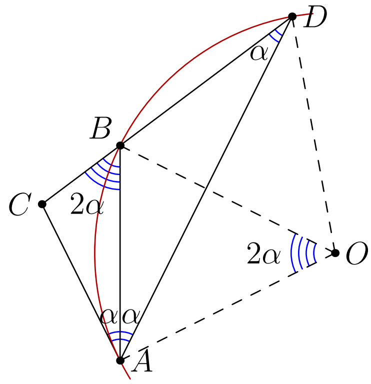
Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta ABC i boku AC. Wtedy $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC$. Trójkąty CBD i CAB są więc podobne, skąd $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$.
Z twierdzenia o dwusiecznej uzyskujemy $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$.

$$AC = AD + CD = CD\frac{AB}{BC} + CD = CD\left(1 + \frac{AB}{BC}\right) = CD\left(\frac{AB + BC}{BC}\right) =$$

$$\frac{CD}{BC}(AB + BC) = \frac{BC}{AC}(AB + BC)$$

co jest równoważne tezie.

II ROZWIĄZANIE



Niech D będzie takim punktem leżącym na półprostej CB, że $AB = BD$.
Dla prostoty oznaczmy $\alpha := \sphericalangle CAB$, wtedy $\sphericalangle ABC = 2\alpha$.
Obliczamy $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAD = (180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle ABC))/2 = (2\alpha)/2 = \alpha$. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABD. Zauważmy, że $\alpha = \sphericalangle ADB < 90^\circ$, zatem ostry kąt $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ADB = 2\alpha$.
Zachodzi $\sphericalangle OAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOB) = 90^\circ - \alpha$, więc $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OAB + \sphericalangle BAC = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$, a więc okrąg opisany na trójkącie ABD jest styczny do prostej AC.
Z twierdzenia o stycznej i siecznej dla okręgu opisanego na $\triangle ABD$ i punktu C uzyskujemy zależność: $AC^2 = BC \cdot CD = BC(BD + BC) = BC(AB + BC)$.

Rozw ŚR M.6

Zapiszmy trójmian $n^2 + 3n + 5$ w postaci $n^2 + 3n - 28 + 33 = (n + 7)(n - 4) + 33$. Rozpatrzmy dwa przypadki:

(a) $11|n + 7$.
Wtedy również $11|n - 4$, zatem $121|(n + 7)(n - 4)$, czyli $121 \nmid (n + 7)(n - 4) + 33$.

(b) $11 \nmid n + 7$.
Wtedy $11 \nmid n - 4$ więc $11 \nmid (n + 7)(n - 4)$, $11 \nmid (n + 7)(n - 4) + 33$ i tym bardziej $121 \nmid (n + 7)(n - 4) + 33$.

Rozw ŚR M.7

Lemat *Jeżeli największy wspólny dzielnik liczb naturalnych a i b jest równy 1 oraz $ab = k^n$ dla pewnych naturalnych k, n, to*

$$a = x^n \text{ i } b = y^n \text{ dla pewnych } x, y \text{ naturalnych.}$$

Dowód lematu

Rozważmy rozkłady na czynniki pierwsze:

$$k = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_l^{t_l} \quad a = p_1^{s_1} \dots p_l^{s_l} \quad b = p_1^{r_1} \dots p_l^{r_l}$$

Skoro $k^n = ab$ to

$$nt_i = s_i + r_i \text{ dla każdego } i.$$

Przy tym $NWD(a, b) = 1$, innymi słowy a i b nie mają wspólnych dzielników pierwszych, a więc

$$\text{dla każdego } i \text{ albo } s_i = 0 \text{ albo } r_i = 0$$

Przy każdym i są 2 możliwości:

$$s_i = n \cdot t_i, \ r_i = 0 \text{ albo } s_i = 0, \ r_i = n \cdot t_i$$

We wszystkich przypadkach wszystkie liczby $s_1, \dots, s_l, r_1, \dots, r_l$ są podzielne przez n, zatem a i b są n-tymi potęgami liczb naturalnych. ■

Mamy pokazać, że równanie: $m(m + 1) = k^n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, k dla $n > 1$.

Zauważmy, że liczby m i $m+1$ są względnie pierwsze. Jeżeli bowiem $d|m$ i $d|m+1$ to $d|m+1-m = 1$, $d = 1$. Z lematu wynika zatem, że istnieją a, b całkowite takie, że

$$m = a^n, \ m + 1 = b^n.$$

Obliczam

$$a^n + 1 = m + 1 = b^n \quad 1 = b^n - a^n.$$

Skoro tak, to $b \geqslant a + 1 > 1$ i możliwe jest szacowanie

$$b^n - a^n \geqslant b^{n-1}(a + 1) - a^n = b^{n-1} + a(b^{n-1} - a^{n-1}) > b^{n-1} \geqslant b > 1.$$

Sprzeczność z $b^n - a^n = 1$.

Rozw ŚR M.8

Lemat *W dowolnym trójkącie ABC nierówność $AB \geqslant BC$ jest równoważna $\sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle BAC$.*

Dowód lematu

Załóżmy $AB \geqslant BC$.

Niech D będzie takim punktem na boku AB, że $BD = BC$. Wtedy $\sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle DCB = \sphericalangle CDB = \sphericalangle DCA + \sphericalangle BAC \geqslant \sphericalangle BAC$.

Załóżmy teraz $\sphericalangle ACB \geqslant \sphericalangle BAC$.

Niech D będzie takim punktem leżącym na AB, że $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC$. Trójkąt DCA jest równoramienny zatem $CD = DA$. Stosując nierówność trójkąta do punktów B, D, C uzyskujemy

$$BC \leqslant BD + DC = BD + DA = AB.$$

■

Aby uzasadnić dolne oszacowanie, przekształcamy równoważnie:

$$60^\circ \leqslant \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c}$$

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \leqslant \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c) \leqslant 3(\alpha a + \beta b + \gamma c)$$

$$0 \leqslant 3(\alpha a + \beta b + \gamma c) - (\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c)$$

$$0 \leqslant a(3\alpha - (\alpha+\beta+\gamma)) + b(3\beta - (\alpha+\beta+\gamma)) + c(3\gamma - (\alpha+\beta+\gamma))$$

$$0 \leqslant a((\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)) + b((\beta-\alpha)+(\beta-\gamma)) + c((\gamma-\alpha)+(\gamma-\beta))$$

$$0 \leqslant (\gamma-\alpha)(c-a) + (\gamma-\beta)(c-b) + (\beta-\alpha)(b-a)$$

Na mocy lematu mamy: $\gamma - \alpha \geqslant 0 \Leftrightarrow c - a \geqslant 0$, czyli oba czynniki są tego samego znaku, a więc ich iloczyn jest nieujemny. Analogicznie pokazujemy, że pozostałe składniki są nieujemne, a więc ich suma jest również nieujemna.

Teraz udowadniamy prawdziwość górnego oszacowania, przekształcając równoważnie:

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} < 90^\circ$$

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

$$2(\alpha a + \beta b + \gamma c) < (\alpha+\beta+\gamma)(a+b+c)$$

$$0 < \alpha(a+b+c-2a) + \beta(a+b+c-2b) + \gamma(a+b+c-2c)$$

$$0 < \alpha(b+c-a) + \beta(a+c-b) + \gamma(a+b-c)$$

Z nierówności trójkąta mamy: $b+c > a$, co oznacza, że $\alpha(b+c-a) > 0$. Analogicznie pokazujemy, że pozostałe składniki są dodatnie, co dowodzi dodatniości sumy.

Rozw ŚR M.9

Pokażemy, że strategię wygrywającą ma Yogi.

W pierwszym ruchu rysuje on jedną z najdłuższych przekątnych, dzieląc $2n$-kąt na dwa przystające $n+1$-kąty, w których dalej toczyć się będzie gra. Następnie gra on symetrycznie do Mateusza – jeśli Mateusz narysuje jakąś przekątną w jednym z $n+1$-kątów, Yogi rysuje taką samą w drugim. Yogi zawsze może wykonać ruch, czyli nigdy nie przegrywa.

Gra zakończy się po skończonej liczbie ruchów, zatem w którymś momencie jeden z graczy przegra. Powyżej wykazaliśmy, że nie będzie to Yogi, zatem będzie to Mateusz.

Rozw ŚR M.10

Zauważmy, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$

jest nieujemne.

Zatem

$$(a^3 - a^2 - a + 1) + (b^3 - b^2 - b + 1) + (c^3 - c^2 - c + 1) \geqslant 0$$

co jest równoważne tezie.

2.7 Trudniejsze

Rozw ŚR T.1

Pokażemy, że liczby $c = 2a + 3b$ i $d = 3a - 2b$ spełniają tezę zadania. Oczywiście są one całkowite, a ponadto:

$$c^2 + d^2 = (2a + 3b)^2 + (3a - 2b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 + 9a^2 - 12ab + 4b^2 = 13(a^2 + b^2)$$

Rozw ŚR T.2

Zauważmy, że

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} \text{ oraz } \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}.$$

$$2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK}) + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} =$$
$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}$$

Skorzystamy z faktu, że $|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}| \leqslant |\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}|$, który jest nierównością trójkąta zapisaną w języku wektorów:

$$2 \cdot MK = \left|2\overrightarrow{MK}\right| = \left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}\right| \leqslant \left|\overrightarrow{DA}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right| = DA + CB$$

Analogicznie otrzymujemy nierówność:

$$2 \cdot NL = \left|2\overrightarrow{NL}\right| = \left|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right| \leqslant \left|\overrightarrow{DC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right| = DC + AB$$

Po zsumowaniu stronami obu nierówności dostajemy tezę:

$$2\,(MK + NL) \leqslant DA + BC + DC + AB$$

II rozwiązanie

Przy odrobinie wysiłku i pewnej utracie naturalności można uniknąć języka wektorów i zastosować nierówność trójkąta w klasycznej postaci.

Lemat *Niech M będzie środkiem boku BC trójkąta ABC. Wtedy*

$$2 \cdot AM \leqslant AB + AC$$

Dowód lematu.

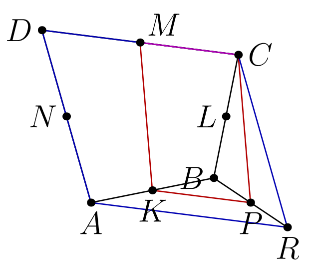
Niech punkt D będzie taki, że $ABCD$ jest równoległobokiem. Wtedy $AD = 2AM$ oraz $BD = AC$. Zatem nierówność

$$2 \cdot AM \leqslant AB + AC$$

jest równoważna nierówności trójkąta:

$$AD \leqslant AB + BD$$

■



Niech punkt P będzie taki, że $MKPC$ jest równoległobokiem, a punkt R taki, że P jest środkiem BR.
Jeżeli $P = B$, to $R = P = B$, czyli $KBCM$ jest równoległobokiem, w szczególności $KM = BC$ i $MC||KB$, stąd $DM||AK$, ale również $DM = CM = BK = AK$, zatem $AKMD$ jest równoległobokiem, czyli $KM = AD$, a więc $2 \cdot KM = AD + BC$.
Dalej zakładam, że $B \neq P$ a więc i $B \neq R$.

Oczywiście $\frac{BA}{BK} = \frac{BR}{BP} = 2$, więc $KP||AR$ i z twierdzenia Talesa

$$\frac{AR}{KP} = \frac{BR}{BP} = 2,\ AR = 2 \cdot KP = 2 \cdot MC = CD$$

Zachodzą równoległości prostych: $AR||KP||MC||CD$, więc $AR||CD$. Ale również $AR = CD$, więc czworokąt $ARCD$ jest równoległobokiem, ergo $CR = AD$.

Stosujemy lemat do trójkąta $\triangle CBR$:

$$2 \cdot KM = 2 \cdot CP \leqslant CB + CR = CB + AD.$$

Analogicznie $2 \cdot NL \leqslant AB + CD$, razem $2\,(MK + NL) \leqslant DA + BC + DC + AB$.

Rozw ŚR T.3

Niech $a = x + 1$ i $b = y + 1$. Oczywiście a, b są rzeczywiste dodatnie.

Założenie przyjmuje postać: $ab = 2$, a teza: $(a-1)(b-1) + \frac{1}{(a-1)(b-1)} \geqslant 6$. Przekształcamy ją dalej równoważnie wykorzystując warunek $ab = 2$.

$$ab - (a+b) + 1 + \frac{1}{ab - (a+b) + 1} \geqslant 6$$

$$3 - (a+b) + \frac{1}{3 - (a+b)} \geqslant 6$$

$$\frac{1}{3 - (a+b)} \geqslant 3 + (a+b)$$

$$1 \geqslant (3 + (a+b))(3 - (a+b))$$

$$1 \geqslant 9 - (a+b)^2$$

$$(a+b)^2 \geqslant 8$$

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

Inne rozwiązanie

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną wynika $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, zatem

$$2 = (1+x)(1+y) = 1 + x + y + xy \geqslant 1 + xy + 2\sqrt{xy}$$

$$1 - xy \geqslant 2\sqrt{xy}$$

Zachodzi $1 - xy \geqslant 2\sqrt{xy} > 0$ – strony nierówności są dodatnie, więc zachowa ona prawdziwość po podniesieniu obu stron do kwadratu:

$$1 - 2xy + (xy)^2 = (1 - xy)^2 \geqslant 4xy$$

$$1 + (xy)^2 \geqslant 6xy$$

$$\frac{1}{xy} + xy \geqslant 6.$$

Rozw ŚR T.4
Niech liczby całkowite dodatnie $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{13}$ będą długościami odcinków z zadania.

Oczywiście na to, żeby z odcinków x, y, z dało się zbudować trójkąt, potrzeba i wystarcza $x < y + z,\ y < x + z,\ z < x + y$.

Jeżeli $0 < x \leqslant y \leqslant z$ to automatycznie $x + z > y$ i $y + z > x$, zatem wystarczy $x + y > z$.

Załóżmy, że nie da się zbudować trójkąta z żadnych trzech odcinków. Z odcinków a_i, a_{i+1}, a_{i+2} nie da się zbudować trójkąta, a więc $a_{i+2} \geqslant a_{i+1} + a_i$ dla każdego i.

Oszacowujemy z dołu kolejne wyrazy ciągu:

$$\begin{aligned}
a_1 &\geqslant 1 \\
a_2 &\geqslant 1 \\
a_3 &\geqslant a_2 + a_1 \geqslant 2 \\
a_4 &\geqslant a_3 + a_2 \geqslant 3 \\
a_5 &\geqslant a_4 + a_3 \geqslant 5 \\
a_6 &\geqslant a_5 + a_4 \geqslant 8 \\
&\ldots \\
a_{13} &\geqslant a_{12} + a_{11} \geqslant 144 + 89 = 233
\end{aligned}$$

Ale $a_{13} \leqslant 200$. Sprzeczność.

Jeżeli byłoby 12 liczb to być może nie dałoby się zbudować trójkąta. Naturalny przykład pochodzący z poprzedniego rozwiązania to początkowe wyrazy tzw. ciągu Fibonacciego:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	143

Liczby są budowane następująco:

$$F_1 = F_2 = 1 \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \geqslant 0$$

Dla dowolnych $k > j > i$ zachodzi $F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \geqslant F_j + F_i$, zatem nie da się zbudować trójkąta z odcinków o długościach F_i, F_j, F_k.

Rozdział 3

Wykłady

3.1 Kombinatoryczne kolorowanki

ŚR W1.1
Czy planszę 8×8, z której usunięto dwa przeciwległe narożne pola, można pokryć kostkami domina 1×2?

ŚR W1.2
Czy planszę 10×10 można pokryć klockami:

(a) w kształcie T - 3 kwadraciki w rzędzie z jednym doklejonym pośrodku;

(b) w kształcie L - 3 kwadraciki z jednym doklejonym obok;

(c) 1×4?

ŚR W1.3
Czy szachownicę 13×13 z wyciętym środkowym polem można pokryć klockami 1×4?

ŚR W1.4
Czy poziomą szachownicę 11×10 można pokryć poziomymi klockami 2×1 i pionowymi 1×3?

ŚR W1.5
Na szachownicy 8×8 ułożono 21 klocków 3×1. Które pole zostało puste?

ŚR W1.6
Na szachownicy 11×11 ułożono 15 klocków 2×2. Wykaż, że można zmieścić jeszcze jeden taki klocek.

3.2 Geometria

ŚR W2.1
Na bokach AB i AD czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg obrano takie punkty P i Q, że $AP = CD$ oraz $AQ = BC$. Odcinki AC i PQ przecinają się w punkcie M. Wykaż, że $PM = MQ$.

ŚR W2.2
Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ obrano w taki sposób punkt O, że $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$. Udowodnij, że $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ODC$.

ŚR W2.3
Na zewnątrz trójkąta ABC budujemy na jego bokach AB i AC kwadraty $ABPE$ i $ACRD$. Środkami odcinków BC i ED są odpowiednio punkty M i N. Wykaż, że prosta AM jest prostopadła do prostej ED, zaś AN do BC.

ŚR W2.4
W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg bok AB jest równy przekątnej BD. Punkt M jest rzutem prostokątnym wierzchołka B na przekątną AC. Udowodnij, że $AM = DC + CM$.

ŚR W2.5
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Okrąg opisany na trójkącie AOB przecina proste CA i CB jeszcze w punktach odpowiednio P i Q. Udowodnij, że proste CO i PQ są do siebie prostopadłe.

ŚR W2.6
Dany jest trójkąt ABC. Punkt wewnętrzny E środkowej AD tego trójkąta rzutujemy prostokątnie na bok BC, otrzymując punkt F. Punkt wewnętrzny M odcinka EF rzutujemy prostokątnie na boki AC i AB, otrzymując punkty odpowiednio N i P. Udowodnij, że jeżeli punkty N,E i P leżą na jednej prostej, to M należy do dwusiecznej kąta BAC.

ŚR W2.7
W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC, zaś P i R są dowolnymi punktami wewnętrznymi odpowiednio boków AB i AC. Odcinki AM i PR przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że jeżeli Q jest środkiem odcinka PR, to PR jest równoległy do boku BC.

ŚR W2.8
W trójkącie ABC boki AB i AC są równe. Punkt D jest środkiem boku AB, E - środkiem ciężkości trójkąta ACD, zaś O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że proste OE i CD są prostopadłe.

3.3 Wielomiany

Definicja *Wielomianem nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem: $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dla pewnych liczb rzeczywistych $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$. Liczby te nazywamy współczynnikami wielomianu W, zaś n jego stopniem. Liczbę b taką, że $W(b) = 0$ nazywamy pierwiastkiem wielomianu.*

Obserwacja *Wielomiany dzielimy z resztą, podobnie jak liczby całkowite.*
Dla a, b naturalnych ($b \neq 0$) istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q, r spełniająca warunki:

$$a = qb + r \quad i \quad 0 \leqslant r < b$$

Dla wielomianów F, G ($G \neq 0$) istnieje dokładnie jedna para wielomianów Q, R spełniająca warunki:

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x) \quad i \quad 0 \leqslant st\ R(x) < st\ G(x)$$

Jeżeli $R(x) = 0$ to mówimy, że wielomian F jest podzielny przez G, a wielomian G dzieli wielomian F i piszemy: $G|F$.

Twierdzenie *Liczba rzeczywista x_0 jest pierwiastkiem wielomianu F wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian F można przedstawić w postaci $(x - x_0)Q(x)$ dla pewnego wielomianu Q (jeśli x_0 jest całkowite i F ma współczynniki całkowite to Q również ma współczynniki całkowite).(Twierdzenie Bèzout)*

Dowód.
Rozważmy dzielenie z resztą wielomianu F przez dwumian $x - x_0$.

$$F(x) = (x - x_0)Q(x) + R(x) \ \wedge \ st\ R(x) < st\ x - x_0 = 1$$

$st\ R(x) = 0$, tym samym R jest wielomianem stałym, czyli $R(x) = r$ dla pewnego r całkowitego.

$$F(x) = (x - x_0)Q(x) + r$$

Bierzemy $x = x_0$:

$$F(x_0) = r$$

$$F(x) = (x - x_0)Q(x) + F(x_0)$$

$$F(x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 | F(x)$$

■

ŚR W3.1
Znajdź reszty z dzielenia wielomianu $(x^2 - x - 1)^{2010}$ przez wielomiany: $x - 1$ i $x^2 - 1$.
ŚR W3.2
Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że istnieją 4 różne argumenty całkowite x_1, x_2, x_3, x_4 spełniające:

$$W(x_1) = W(x_2) = W(x_3) = W(x_4) = 1$$

Wykaż, że nie istnieje takie całkowite x_5, by $W(x_5) = -1$.
ŚR W3.3
Pokaż, ze jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych W dla siedmiu różnych liczb całkowitych przyjmuje wartość 2010, to nie ma pierwiastków całkowitych.
ŚR W3.4
Wielomian P, stopnia co najwyżej $n > 2$, o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k = 0, 1, \ldots, n$ spełnia równość $P(k) = \frac{k}{k+1}$. Oblicz $P(n+1)$.

Twierdzenie *Jeśli W ma wszystkie współczynniki całkowite, to dla dowolnych całkowitych, różnych liczb a, b zachodzi $a - b | W(a) - W(b)$.*

Dowód.
Z twierdzenia Bèzouta wynika, że dla dowolnie wybranego całkowitego b mamy:

$$W(x) = (x - b)Q(x) + W(b)$$

$$W(x) - W(b) = (x - b)Q(x)$$

$$x - b|W(x) - W(b)$$

W szczególności dla $x = a$ jest:

$$a - b|W(a) - W(b)$$

■

ŚR W3.5
Rozstrzygnij, czy istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych taki, by: $W(7) = 11$ i $W(11) = 13$.
ŚR W3.6
Dany jest wielomian o współczynnikach całkowitych $P(x)$, taki, że $3|P(7)$ oraz $7|P(3)$. Wykaż, że $21|P(10)$.
ŚR W3.7
Wykaż, że dla dowolnego wielomianu o współczynnikach całkowitych W mającego pierwiastek całkowity x_0 można znaleźć takie c, że dla każdego k jest $2^k|W(2^k - c)$.
ŚR W3.8
Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia warunki:

$$17|W(15), 13|W(0), 9|W(11)$$

Pokaż, że $1989|W(1001)$.
ŚR W3.9
Wielomian Q o współczynnikach całkowitych dla k kolejnych liczb całkowitych przyjmuje wartości podzielne przez k. Udowodnij, że dla dowolnego x całkowitego $Q(x)$ jest podzielne przez k.

3.4 Równania diofantyczne

1 Doprowadzanie do postaci iloczynowej.

ŚR W4.1
Rozwiązać równania w liczbach naturalnych:

(a) $xy + 3x - 2y = 36$
(b) $x^2 = y^2 + 2y + 12$
(c) $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 17$

ŚR W4.2
Rozwiązać równania w liczbach całkowitych:

(a) $(2x + y)(5x + 3y) = 7$
(b) $xy = x + y + 3$
(c) $x^2 = y^2 + 14$
(d) $x^2 + 4x - y^2 - 2y = 8$
(e) $xy + 9x - 4y = 51$
(f) $x^2 + x + 41 = y^2$
(g) $x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$

2 Znajomość reszt z dzielenia.

ŚR W4.3
Rozwiązać równania w liczbach całkowitych:

(a) $x^2 - 7y = 10$
(b) $15x^2 - 7y^2 = 9$

3 Liczby pierwsze.

ŚR W4.4
Rozwiązać równania w liczbach pierwszych:

(a) $p^2 - 2q^2 = 1$
(b) $pqr = 5(p + q + r)$
(c) $p + q + r = pq + 1$

ŚR W4.5
Zbadać, czy istnieją trzy różne liczby pierwsze p, q, r, dla których $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ jest liczbą naturalną.

ŚR W4.6
Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p, q oraz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają równanie: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$.

ŚR W4.7
Znaleźć pary (x, y) liczb całkowitych, dla których $x^4 + 4y^4$ jest liczbą pierwszą.

4 Nieskończone schodzenie.

ŚR W4.8
Wykazać, że jedynym rozwiązaniem (x, y, z) równania w liczbach całkowitych jest rozwiązanie zerowe $(0, 0, 0)$:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$
(b) $x^3 = 2y^3 + 4z^3$
(c) $x^2 + y^2 = 3z^2$

5 Postać ilorazowa.

ŚR W4.9
Rozwiązać równania w liczbach całkowitych:

(a) $3x - 5y = 7$
(b) $21x + 48y = 6$

ŚR W4.10
Wyznaczyć takie liczby całkowite x, aby liczba $\frac{7x+1}{3x+4}$ była całkowita.

6 Inne.

ŚR W4.11
Rozwiązać równania w liczbach całkowitych:

(a) $x^2 + y^2 = x + y + 2$
(b) $3x^2 + 5y^2 = 345$
(c) $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + y)^2 + 1$

3.5 Kryptografia

1 Najprostsze szyfry:

(a) szyfr Cezara - każda litera tekstu jawnego zastępowana jest literą oddaloną od niej o stałą liczbę pozycji w alfabecie. Juliusz Cezar używał przesunięcia 3, najczęściej używane jest ROT13.

Przykłady:

MATEMATYKA ⟶ PDWHPDWBND (przesunięcie o 3)

CEMRFHAVRPVR ⟶ PRZESUNIĘCIE (ROT13)

(b) szachownica Polibiusza - każdej literze przypisywana jest liczba dwucyfrowa zgodnie z poniższą tabelą. Cyfra dziesiątek to numer wiersza, a cyfra jedności - nr kolumny, w której znajduje się dana litera.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

Przykłady:

ZASZYFROWANY TEKST ⟶ 55 11 43 55 54 21 42 34 52 11 33 54 44 15 25 43 44

52 24 11 14 34 32 34 43 13 ⟶ WIADOMOŚĆ

(c) AtBash - polega na zamianie litery leżącej na i-tej pozycji od początku alfabetu na literę leżącą na i-tej pozycji od końca.

Przykłady:

KRYPTOGRAFIA ⟶ PIBKGLTIZURZ

LWHABUILDBDZMRV ⟶ ODSZYFROWYWANIE

(d) alfabet Morse'a - polega na zamianie poszczególnych liter na ciągi kropek i kresek według wzoru:

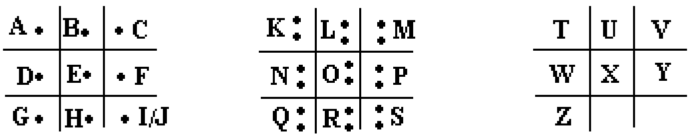
A ·–	N –·
B – · · ·	O – – –
C – · –·	P · – –·
D – · ·	Q – – ·–
E ·	R · – ·
F · · –·	S · · ·
G – – ·	T –
H · · · ·	U · · –
I ··	V · · · –
J · – ––	W · – –
K – · –	X – · ·–
L · – ··	Y – · ––
M ––	Z – – ··

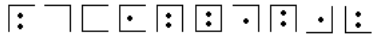
Przykłady:

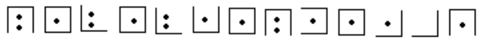
Morse ⟶ – – | – – – | · – · | · · · |·

– – | – – – | · – · | – – · ·| · || – · · · | · –| · – · ·| – | – · – –| – · – ·| – · – | · ·|· ⟶ Morze Bałtyckie

(e) szyfr cmentarny - litery zastępowane są odpowiadającymi im symbolami:



SZYFROGRAM ⟶ 

 ⟶ REMEMBER DEATH

(f) Playfair - do szyfrowania używamy klucza o niepowtarzających się literach. Tworzymy tabelkę 5×5, przy czym najpierw zapisujemy klucz, a następnie resztę alfabetu (litery I i J zapisujemy jako jedną). Tekst jawny dzielimy na bloki dwuliterowe (jeśli jest nieparzysta ilość liter, to na końcu dopisujemy X). Dla każdego bloku możliwe są 2 sytuacje:

   i. litery leżą w tym samym wierszu lub kolumnie - zastępujemy je literami następnymi w danym wierszu/kolumnie;

   ii. litery leżą w różnych wierszach i kolumnach - literę pierwszą zastępujemy literą z wiersza I i kolumny II litery, natomiast drugą - literą z wiersza II i kolumny I.

   Przykłady:

   Dla klucza SZYFR i następującej tabelki:

S	Z	Y	F	R
A	B	C	D	E
G	H	I/J	K	L
M	N	O	P	Q
T	U	V	W	X

   KO-NI-EC-WA-KA-CJ-IX ⟶ IP-OH-AD-TD-GD-IO-LV

   Dla klucza PIATEK i tabelki:

P	I/J	A	T	E
K	B	C	D	F
G	H	L	M	N
O	Q	R	S	U
V	W	X	Y	Z

   UY-ZD-SU-TS-PE-SX-FX-MZ ⟶ SZ-YF-RS-YM-ET-RY-CZ-NY

(g) szyfr Vigenère'a - potrzebujemy tu tablicy 26×26, w której każdy wiersz jest alfabetem przesuniętym odpowiednio o $0, 1, 2, ..., 25$, oraz klucza. Jego kolejne litery zapisujemy pod literami tekstu jawnego, w razie potrzeby powtarzając go wielokrotnie. Pierwsza litera z każdej pary wyznacza wiersz, a druga kolumnę, na przecięciu których znajdujemy kolejną literę szyfrogramu.

   Przykłady:

   Dla klucza SERWY:

   TEKST JAWNY ⟶ LIBOR BENJW

   Dla klucza KLUCZ:

   GJDCSUZQQ SKUHC VSLXQLYDW ⟶ WYJĄTKOWO TAJNA WIADOMOŚĆ

(h) szyfr Ottendorfa (książkowy) - każda litera zapisana jest przez trzy liczby X-Y-Z, oznaczające odpowiednio numer strony w danej książce, numer wersu i nr litery w tym wersie.

   Przykłady w jednostronnym tekście „Romantyczności" (wersy 66-69):

   Martwe znasz prawdy, nieznane dla ludu,
   Widzisz świat w proszku, w każdej gwiazd iskierce.
   Nie znasz prawd żywych, nie obaczysz cudu!
   Miej serce i patrzaj w serce!

   TEKST ⟶ np. 1-66-4, 1-68-3, 1-67-19, 1-68-7, 1-69-13

   1-66-1, 1-67-30, 1-69-8, 1-67-22, 1-68-2, 1-66-20, 1-67-9, 1-69-10, 1-68-31, 1-69-15 ⟶ MICKIEWICZ

2 RSA - asymetryczny algorytm szyfrujący opublikowany w 1977r. przez R. Rivesta, A. Shamira i L. Adlemana. Jego zasadniczą cechą są dwa klucze: publiczny do szyfrowania i prywatny do odczytywania danych.

Etapy tworzenia kluczy i szyfrowania danych:

(a) wybieramy dwie duże liczby pierwsze p i q
np. $p = 5,\ q = 11$

(b) obliczamy liczbę $n = p \cdot q$ oraz wartość funkcji Eulera dla n: $\phi(n) = (p-1)(q-1)$
$n = 55,\ \phi(n) = 40$

(c) znajdujemy liczbę nieparzystą e taką, że $1 < e < n$ oraz $NWD(e, \phi(n)) = 1$
$e = 7$

(d) wyznaczamy liczbę d spełniającą: $d \cdot e \equiv 1\ mod\ \phi(n)$
$d = 23$

(e) klucz publiczny jest parą (e, n), natomiast klucz prywatny - (d, n)
klucz publiczny: $(7, 55)$, *klucz prywatny:* $(23, 55)$

(f) tekst do zaszyfrowania zamieniamy według wcześniej ustalonego systemu na liczby naturalne t takie, że $0 < t < n$
np. $t = 15$

(g) szyfrujemy liczby t według wzoru: $c = t^e\ mod\ n$
$c = 15^7\ mod\ 55 \Rightarrow c = 5$

(h) odszyfrowywanie przebiega analogicznie, z zastosowaniem klucza prywatnego: $t = c^d\ mod\ n$
$t = 5^{23}\ mod\ 55 \Rightarrow t = 15$

ŚR W5.1

Rozszyfrować poniższy tekst:
Khduv, khduv altb gh nvyhtp, gh shzhtp gfsh zvipl wplruh rzplgupjgrh.

ŚR W5.2

UAYCCKA. PZAYXCWP XKV EU MYXXUPRTQ TU ZJLYJRF. XUXMJ: TUXHAMCN.
Podpowiedź: KDVOR.

Rozdział 4

Wskazówki do wykładów

PROSERWY 2010
obóz informatyczno - matematyczny

4.1 Kombinatoryczne kolorowanki

Wskazówka ŚR W1.1

Niech nasza plansza będzie szachownicą. Zauważmy, że usunięte zostały pola tego samego koloru. Jakie pola pokrywa każdy klocek i czemu nie da się tymi klockami pokryć szachownicy?

Wskazówka ŚR W1.2

(a) Znów weźmy pod uwagę szachownicę. Każdy klocek pokrywa 1 lub 3 pola czarne. Jaka musi być liczba klocków, żeby pokryć 50 czarnych pól? Dlaczego nie może być równa 25?

(b) Pokolorujmy planszę w paski. Wtedy zadanie sprowadza się do poprzedniego przypadku.

(c) Spróbujmy znaleźć takie kolorowanie, żeby każdy klocek pokrywał dokładnie 3 pola czarne. Istnieje takie, że liczba czarnych pól nie jest podzielna przez 3.

Wskazówka ŚR W1.3

Pokolorujmy planszę na 4 kolory tak, żeby każdy klocek zakrywał dokładnie jedno pole każdego koloru. Przy pewnym kolorowaniu pól jednego koloru może być więcej niż innego.

Wskazówka ŚR W1.4

Pokolorujmy planszę w pionowe paski zaczynając od czarnego. Można udowodnić, że ilość klocków 2×1 jest postaci $3k+1$. Każdy klocek poziomy zakrywa 1 pole białe, a pionowy 0 lub 3. Zapiszmy zatem ilość białych pól (50) w zależności od ilości klocków poziomych i pionowych. Chcemy dojść do sytuacji, gdy liczba klocków nie jest całkowita.

Wskazówka ŚR W1.5

Kolory możemy zastąpić liczbami tak, żeby każdy klocek zakrywał tę samą sumę (na przykład 3). Jak mają się do siebie suma liczb na wszystkich polach i suma liczb na klockach? Prawdopodobnie trzeba będzie rozważyć kilka kolorowań.

Wskazówka ŚR W1.6

Na planszy można zaznaczyć 16 takich kwadratów, że każdy klocek ma pola wspólne z dokładnie jednym z nich. Możliwe więc będzie położenie szesnastego klocka na ostatnim, niezakrytym kwadracie.

4.2 Geometria

Wskazówka ŚR W2.1

Niech X będzie takim punktem półprostej DA, że $XA = AQ$. Korzystając z własności czworokąta wpisanego w okrąg i założeń zadania chcemy wykazać przystawanie trójkątów XAP i BCD. Wykorzystując własności kątów wpisanych opartych na tym samym łuku wykazujemy równoległość prostych PX oraz AM. Używamy twierdzenia Talesa do pokazania, że $QM = MP$.

Wskazówka ŚR W2.2

Niech S będzie obrazem punktu O w translacji o wektor $\overrightarrow{DA}$. Wykorzystując założenie zadania pokazujemy, że punkty A, O, B, S leżą na jednym okręgu. Korzystając z faktu, że kąty wpisane $\sphericalangle SAB$ i $\sphericalangle SOB$ oparte na tym samym łuku mają równe miary oraz z równości kątów odpowiadających udowadniamy, że $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ODC$.

Wskazówka ŚR W2.3

Dobudujmy równoległobok $ADFE$. Korzystając z cechy bok-kąt-bok wykazujemy przystawanie trójkątów DFA i ABC. W połączeniu z prostopadłościami: $DF \perp AB$ i $DA \perp AC$ pokazujemy równoważną tezie własność: $FA \perp BC$. Analogicznie udowadniamy, że $AM \perp ED$ lub piszemy, że idzie to analogicznie (;p).

Wskazówka ŚR W2.4

Niech N będzie rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD. Wykazujemy, że $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BCN$ w celu pokazania przystawania trójkątów BCM i BCN. Następnie udowadaniamy przystawanie trójkątów prostokątnych BAM i BDN.

Wskazówka ŚR W2.5

Oznaczmy przez M punkt przecięcia CO i PQ, chcemy pokazać że $\sphericalangle CMQ = 90°$. Przeprowadzamy rachunki na kątach, wykorzystując następujące fakty: suma kątów przeciwległych w czworokącie wynosi $180°$, kąt półpełny ma $180°$, kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, trójkąt równoramienny ma równe kąty przy podstawie, suma kątów w trójkącie wynosi $180°$.

Wskazówka ŚR W2.6

Poprowadźmy przez punkt E prostą równoległą do BC. Jej punkty przecięcia z bokami AB i AC oznaczmy przez X i Y. Zauważmy, że punkty E, X, P, M oraz M, Y, N, E leżą czwórkami na jednym okręgu. Z tego oraz z współliniowości punktów P, E, N wywnioskujmy, że punkty A, X, M, Y leżą na jednym okręgu. Korzystając z twierdzenia Talesa wykażmy, że $XE = EY$ i tym samym, że trójkąty EMX i EMY są przystające. Wywnioskujmy, że $\sphericalangle XAM = \sphericalangle MAY$.

Wskazówka ŚR W2.7

Załóżmy, że Q jest środkiem PR i PR nie jest równoległe do BC. Poprowadźmy przez Q prostą równoległą do BC, przecinającą boki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y. Wykorzystajmy twierdzenie Talesa do pokazania, że $XQ = QY$. Zauważmy, że trójkąty PQX i RQY są przystające, z czego wynika równość: $\sphericalangle PXQ = \sphericalangle RYQ$ stojąca w sprzeczności z nierównoległością odcinków AB i AC.

Wskazówka ŚR W2.8

Niech F będzie punktem przecięcia się prostych DE i AC, G - prostych AO i CD, zaś H - prostych AO i BC. Na odcinku BC obieramy taki punkt I, aby $HI = \frac{1}{3}HC$. Pokażmy, że $GH = \frac{1}{3}AH$, z czego wynika $GI||AC$. Następnie pokazujemy podobieństwo trójkątów prostokątnych (dlaczego prostokątnych?) ADO i GHI. Układamy odpowiednią proporcję i wykorzystujemy związki $HI = \frac{1}{2}DE$ i $GH = \frac{1}{2}AG$, które wcześniej udowadniamy. Wykazujemy podobieństwa trójkątów ADG i DOE. Dlaczego wystarcza ono do wykazania tezy?

4.3 Wielomiany

Wskazówka ŚR W3.1

Pamiętajmy, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - x_0$ wynosi $W(x_0)$. Aby policzyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x^2 - 1$, najpierw policzmy reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumiany $x - 1$ i $x + 1$, a następnie ułóżmy odpowiedni układ równań.

Wskazówka ŚR W3.2

Zastanówmy się, co możemy powiedzieć o pierwiastkach wielomianu $W(x) - 1$. Pamiętajmy także, że x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 są całkowite oraz o tym, że jeżeli $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ i $P(x)$ ma współczynniki całkowite, to $Q(x)$ również ma współczynniki całkowite.

Wskazówka ŚR W3.3

Podobnie jak w poprzednim zadaniu pomyślmy, jakie pierwiastki ma wielomian $W(x) - 2010$. Oczywiście nie możemy zapomnieć, że jeśli x_0 jest pierwiastkiem $W(x)$ to $W(x_0) = 0$.

Wskazówka ŚR W3.4

Rozważmy wielomian $W(x) = (x+1)P(x) - x$. Zauważmy, że jego pierwiastkami są liczby $0, 1, \ldots, n$. Skorzystaj z Twierdzenie Bèzouta. Pamiętajmy, że aby wielomiany były równe, muszą mieć równe stopnie. Policzenie $W(-1)$ pozwala nam ustalić współczynnik przy najwyższej potędze x wielomianu $W(x)$.

Wskazówka ŚR W3.5

Zastosujmy wprost Twierdzenie dla liczb $a = 11$ i $b = 7$, a następnie skorzystajmy z równości danych w zadaniu.

Wskazówka ŚR W3.6

Warto w taki sposób dobrać a, b w Twierdzeniu, aby po prawej stronie wystąpiło wyrażenie $P(10)$ z innym znanym nam wyrażeniem. Należy również pamiętać o dwóch fakcikach: jeżeli dzielnik dzieli dwie liczby to dzieli również ich różnicę; jeżeli dwie względnie pierwsze liczby dzielą daną liczbę, to ich iloczyn również ją dzieli.

Wskazówka ŚR W3.7

W Twierdzeniu połóżmy $a = 2^k - c$. Dobierzmy odpowiednie b i zastanówmy się, czym musi być x, żeby było $2^k|W(x)$ dla każdego k.

Wskazówka ŚR W3.8

Zauważmy, że $1989 = 9 \cdot 13 \cdot 17$ oraz że: $17|1001 - 15$, $13|1001 - 0$, $9|1001 - 11$.

Wskazówka ŚR W3.9

Jeżeli mamy zbiór $\mathbb{A}$ złożony z k kolejnych liczb całkowitych, to każdą liczbę całkowitą z możemy przedstawić w postaci $z = sk + \alpha$, gdzie $s \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in \mathbb{A}$. W Twierdzeniu połóżmy $a = z$ i $b = \alpha$.

4.4 Równania diofantyczne

Wskazówka ŚR W4.1

Znajdź dla jakiego x uzależnionego od y lewa strona się zeruje. Oznacza to, że musi być ona podzielna przez pewien dwumian.

Wskazówka ŚR W4.2

Przemnóż obie strony przez stałą, aby po zwinięciu otrzymać kwadrat całkowitego wyrażenia.

Wykorzystaj skończoność liczby możliwości rozkładu liczby a na 2 czynniki.

Wskazówka ŚR W4.3

Kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7 może dawać jedynie resztę $0, 1, 2$ lub 4.
Wykorzystaj fakty:

- jeśli liczba pierwsza p dzieli a^2, to p dzieli a;
- jeśli liczba a dzieli iloczyn bc oraz liczby a i b są względnie pierwsze, to a dzieli c;
- kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 może dawać jedynie resztę 0 lub 1.

Wskazówka ŚR W4.4
Jeżeli s jest pierwsze i parzyste, to $s = 2$.
Zauważ, że w tym równaniu liczby p, q, r pełnią tę samą rolę, bo możemy zamienić miejscami dowolne dwie z nich i sens równania się nie zmieni. W takich przypadkach, wiedząc, że jedna z liczb p, q, r ma pewną własność, możemy przyjąć, że konkretnie któraś z nich ma tę własność (Jeżeli wiemy, że jedna z liczb dzieli się przez 5, to możemy przyjąć, że to p dzieli się przez 5). Przy tej metodzie należy jedynie pamiętać, aby w końcowym rozwiązaniu uwzględnić wszystkie permutacje wyniku, który otrzymamy.
Skorzystaj z faktu, że jeżeli liczba pierwsza p jest iloczynem dwóch liczb naturalnych, to są to czynniki 1 i p.

Wskazówka ŚR W4.5
Ułóż i przekształć równanie, aby otrzymać je w języku liczb całkowitych.

Wskazówka ŚR W4.6
Wyznacz n. Pamiętaj o szczególnych własnościach liczb pierwszych. Rozważ cztery przypadki.

Wskazówka ŚR W4.7
Przekształć na różnicę dwóch kwadratów.

Wskazówka ŚR W4.8
Wykorzystaj następujący fakt:
Jeżeli liczba całkowita b jest podzielna przez a^n, gdzie $a \neq 1$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to $b = 0$.

Wskazówka ŚR W4.9
Wyznacz z równania x, następnie zastanów się, jakiej postaci musi być y, aby wyrażenie przedstawiające x było całkowite.

Wskazówka ŚR W4.10
Spróbuj wyodrębnić część całkowitą danej liczby (całkowitą dla każdego x), doprowadzając do zmniejszenia licznika liczby, której całkowitość mamy określić. Skorzystaj z faktu, który mówi, że aby liczba wymierna $\frac{a}{b}$ była całkowita, to musi zachodzić $a \geqslant b$.

Wskazówka ŚR W4.11
Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest dodatni i parzysty.
Uprość równanie, a następnie zauważ, że tylko dla skończonej ilości liczb lewa strona równania nie przekracza prawej.
Zauważ, że jeżeli $abc = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$ lub $c = 0$.

4.5 Kryptografia

Wskazówka ŚR W5.1
Używając szyfru Cezara z przesunięciem o 7, otrzymamy zdanie: Dawno, dawno temu za górami, za lasami żyła sobie piękna księżniczka.

Wskazówka ŚR W5.2
Szyfr Cezara z przesunięciem 3:
KDVOR$\longleftarrow$HASLO
Szyfr Vigenère'a z kluczem HASLO:
UAYCCKA. PZAYXCWP XKV EU MYXXUPRTQ TU ZJLYJRF. XUXMJ: TUXHAMCN.$\longleftarrow$NAGRODA. XOMRXKLB QKD TG FYFMGIRBF FN ZRAKCRN. MGQMR: IGQHIBOG.
Playfair z kluczem NAGRODA:
XOMRXKLB QKD TG FYFMGIRBF FN ZRAKCRN. MGQMR: IGQHIBOG.$\longleftarrow$ZGŁOŚCIE SIĘ PO CZEKOLADĘ DO YOGIEGO. HASŁO: KAPIBARA.

Część II

Grupa olimpijska

Rozdział 5

Zadania

PROSERWY 2010
obóz informatyczno - matematyczny

5.1 Dzień I

OL 1.1
Udowodnij, że układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2011 \\ 3a + 8b + 44c = 2010 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

OL 1.2
Dla jakich n naturalnych zachodzi podzielność $5|(2^n + n^3)$?

OL 1.3
Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O; Q, R są punktami styczności stycznych do okręgu przechodzących przez P, a K jest punktem przecięcia prostych PO i QR.

Prosta k, niebędąca średnicą, przechodzi przez P i przecina okrąg w punktach A i B. Uzasadnij, że punkty A, B, O, K leżą na jednym okręgu.

5.2 Dzień II

OL 2.1
Udowodnij, że dla żadnej liczby naturalnej $n > 0$ liczba $2^{n-1}(2^{n+1} - 1)$ nie jest sześcianem liczby całkowitej.

OL 2.2
Dowiedź, że rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca) \end{cases}$$

jest nieskończenie wiele oraz każda trójka (a, b, c) spełniająca ten układ równań jest nieujemna tj. $a, b, c \geqslant 0$.

Wskazówka: Trójka $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ *spełnia ten układ (sprawdź!).*

OL 2.3
Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Zbiór X ma n elementów, a $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ są takimi podzbiorami X, że suma dowolnych 50 z nich ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów.

Udowodnij, że wśród tych podzbiorów istnieją trzy, z których każde dwa mają niepustą część wspólną.

5.3 Dzień III

OL 3.1
Liczby a, b, k są całkowite, przy czym $k \neq 0$. Wiadomo, że rozwiązaniami równania

$$kx^2 + ax - bk + k^3 = 0$$

są niezerowe liczby całkowite. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2$ jest złożona.

OL 3.2
Udowodnij, że na płaszczyźnie ze standardowym układem współrzędnych nie istnieje trapez o obu kątach przy jednej z podstaw równych $60°$, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite.

OL 3.3
Dana jest nieskończona szachownica. Ireneusz i Iwona wykonują ruchy naprzemiennie stawiając pionki na polach. Udowodnij, że Iwona może powstrzymać Ireneusza od ustawienia w rzędzie lub kolumnie pięciu jego pionków sąsiadujących ze sobą.

5.4 Mecz matematyczny

OL M.1
Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c, d, e spełniają $a^{2010} + b^{2010} + c^{2010} + d^{2010} + e^{2010} = 2010$. Jaka jest największa możliwa wartość wyrażenia

$$a^{400}b^{401}c^{402}d^{403}e^{404}?$$

OL M.2
Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia warunek:

$$W(k)W(2k)\dots W(nk) = \frac{k + 2k + \dots + nk}{n}$$

dla ustalonych względnie pierwszych liczb całkowitych n, k, $n > 1$.

Udowodnij, że $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

OL M.3
W prostokącie o wymiarach 5 na $3k$ ($k \in \mathbb{N}$) umieszczono $2k + 2$ punktów.

Pokaż, że pewne dwa punkty są oddalone od siebie o nie więcej niż $\sqrt{13}$.

OL M.4
Trzy odcinki o długości 1 przecinają się w jednym punkcie. Końce tych odcinków są wierzchołkami sześciokąta. Rozstrzygnij, czy

(a) jego obwód może być większy od 6,

(b) jego obwód może być większy od 5.999999999.

OL M.5
Wielokąt wypukły A leży we wnętrzu wielokąta B. Udowodnij, że obwód A jest nie większy niż obwód B.

OL M.6
Trójkąt ABC jest ostrokątny, a AD, BE, CF są jego wysokościami.

Punkty X, Y, Z leżą na bokach AB, BC, CA odpowiednio. Udowodnij, że

$$XY + YZ + ZX \geqslant FD + DE + EF$$

OL M.7
Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=78 \\ x^3+y^3+z^3=226 \end{cases}$$

OL M.8
Udowodnij, że w dowolnym trójkącie $R \geqslant 2r$, gdzie R, r - promienie okręgów opisanego i wpisanego.

OL M.9
Danych jest $2n+1$ różnych liczb całkowitych o wartościach bezwzględnych nie większych niż $2n-1$. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 3 liczby, których suma wynosi 0.

OL M.10
W czworościanie $ABCS$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku S są proste, a ponadto $SA = SB + SC$. Wykaż, że suma kątów płaskich przy wierzchołku A jest równa $90°$.

5.5 Trudniejsze

OL T.1
Wielomian W o współczynnikach całkowitych nazwiemy *podzielnym przez liczbę naturalną* n, jeżeli wszystkie jego współczynniki są podzielne przez n, innymi słowy, gdy $W = n \cdot V$, gdzie wielomian V ma współczynniki całkowite.

Liczba p jest pierwsza, a niezerowy wielomian P o współczynnikach całkowitych jest stopnia mniejszego niż p. Udowodnij, że jeśli dla każdej liczby całkowitej wartość P jest podzielna przez p, to P jest podzielny przez p w sensie powyższej definicji.

OL T.2
Niech O i I oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego i wpisanego w nierównoramienny trójkąt ABC. Udowodnij, że $\sphericalangle AIO \leqslant 90°$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2BC \leqslant AB + AC$.

OL T.3
Rozstrzygnij, czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi $f(f(x)) = 5x$.

OL T.4
Dane są trzy nieskończone ciągi różnych liczb całkowitych dodatnich $(a_n), (b_n), (c_n)$. Udowodnij, że istnieje nieskończony rosnący ciąg (i_s) liczb naturalnych: $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k < \ldots$ taki, że

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k} < \ldots$$

$$b_{i_1} < b_{i_2} < \ldots < b_{i_k} < \ldots$$

$$c_{i_1} < c_{i_2} < \ldots < c_{i_k} < \ldots$$

Rozdział 6

Rozwiązania

6.1 Dzień I

Rozw OL 1.1
Załóżmy, że istnieje rozwiązanie (a, b, c) danego układu.

Zastosujmy

Twierdzenie (Nierówność Schwarza) *Jeżeli n jest liczbą całkowitą, a $u_1, u_2, \ldots, u_n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ są liczbami rzeczywistymi, to*

$$(u_1^2 + \ldots + u_n^2)(t_1^2 + \ldots + t_n^2) \geqslant (u_1 t_1 + \ldots + u_n t_n)^2$$

Dowód nierówności
Oczywiście dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi $(u_i x - t_i)^2 \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.
Zatem

$$(u_1^2+\ldots+u_n^2)x^2-2(u_1t_1+\ldots+u_nt_n)x+(t_1^2+\ldots+t_n^2) = (u_1x-t_1)^2+(u_2x-t_2)^2+\ldots+(u_nx-t_n)^2 \geqslant 0$$

Lewa strona nierówności to funkcja kwadratowa ze względu na x. Funkcja ta jest stale nieujemna, zatem musi ona mieć niedodatni wyróżnik (deltę):

$$\Delta = 4(u_1t_1 + \ldots + u_nt_n)^2 - 4(u_1^2 + \ldots + u_n^2)(t_1^2 + \ldots + t_n^2) \leqslant 0$$

co dowodzi nierówności z tezy. ■

Biorąc $(u_1, u_2, u_3) := (a, b, c), (t_1, t_2, t_3) := (3, 8, 44)$ uzyskujemy

$$(a^2 + b^2 + c^2)(3^2 + 8^2 + 44^2) \geqslant (3a + 8b + 44c)^2.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$2011 \cdot 2009 \geqslant 2010^2,$$

ale $2011 \cdot 2009 = 2010^2 - 1 < 2010^2$. Sprzeczność.

Inny dowód
Jak w poprzednim rozwiązaniu załóżmy, że liczby a, b, c spełniają dany układ równań.
Zauważmy, że

$$(a^2 + b^2 + c^2) - 2(3a + 8b + 44c) + 3^2 + 8^2 + 44^2 = (a - 3)^2 + (b - 8)^2 + (c - 44)^2$$

Podstawiając warunki z zadania obliczamy:

$$(a^2 + b^2 + c^2) - 2(3a + 8b + 44c) + 3^2 + 8^2 + 44^2 = 2011 - 2 \cdot 2010 + 2009 = 0$$

Zatem $(a - 3)^2 + (b - 8)^2 + (c - 44)^2 = 0$, czyli $a = 3, b = 8, c = 44$.
Jeżeli tak, to $2011 = a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 8^2 + 44^2 = 2009$. Sprzeczność.

Rozw OL 1.2

Zauważmy że:

$$n \equiv 0 \mod 4 \Rightarrow n = 4k \Rightarrow 2^n \equiv 2^{4k} \equiv (2^4)^k \equiv 1^k \equiv 1 \mod 5$$

$$n \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow n = 4k+1 \Rightarrow 2^n \equiv 2^{4k+1} \equiv 2^{4k} \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 2 \mod 5$$

$$n \equiv 2 \mod 4 \Rightarrow n = 4k+2 \Rightarrow 2^n \equiv 2^{4k+2} \equiv 2^{4k} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \mod 5$$

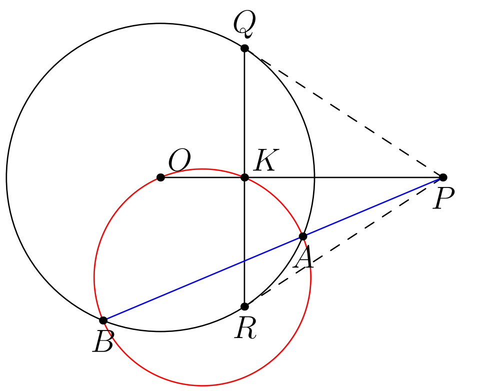
$$n \equiv 3 \mod 4 \Rightarrow n = 4k+3 \Rightarrow 2^n \equiv 2^{4k+3} \equiv 2^{4k} \cdot 2^3 \equiv 1 \cdot 8 \equiv 8 \equiv 3 \mod 5$$

Zatem prawdziwa jest tabelka:

$n \mod 20$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$n \mod 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$2^n \mod 5$	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2	4	3
$n \mod 5$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$n^3 \mod 5$	0	1	3	2	4	0	1	3	2	4	0	1	3	2	4	0	1	3	2	4
$2^n + n^3 \mod 5$	1	3	2	0	0	2	0	1	3	1	4	4	4	4	3	3	2	0	1	2

z której wynika, że wyrażenie $2^n + n^3$ jest podzielne przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest postaci $20k + r$, gdzie k jest całkowite nieujemne, a $r \in \{3, 4, 6, 17\}$.

Rozw OL 1.3



Proste AB i KO przecinają się w P, więc wystarczy wykazać, że

$$PA \cdot PB = PK \cdot PO.$$

Z twierdzenia o siecznych wynika, że

$$PA \cdot PB = PQ^2$$

Trójkąty PKQ i PQO są prostokątne i mają kąt miary $\sphericalangle KPQ = \sphericalangle OPQ$, więc są podobne:

$$\triangle PKQ \simeq \triangle PQO$$

Stąd $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{PQ}{PO}$ czyli $PK \cdot PO = PQ^2 = PA \cdot PB$.

6.2 Dzień II

Rozw OL 2.1

Załóżmy, że taka liczba istnieje: n jest takie, że

$$2^{n-1}(2^{n+1} - 1) = k^3$$

Liczby $2^{n-1}, 2^{n+1} - 1$ są względnie pierwsze, a ich iloczyn jest sześcianem liczby całkowitej. Patrząc na rozkład na czynniki pierwsze stwierdzamy, że każda z nich jest sześcianem liczby całkowitej. Liczba 2^{n-1} jest sześcianem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy $3|n-1$. Zatem $n = 3k+1$.

$$2^{n+1} - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 8^k \cdot 4 - 1 \equiv 4 - 1 = 3 \mod 7$$

jeżeli więc wykażemy, że sześcian liczby całkowitej nie może dać reszty 3 z dzielenia przez 7, to dojdziemy do sprzeczności.

Udowadniamy to przez bezpośrednie przeliczenie wszystkich możliwych reszt:

$n \mod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \mod 7$	0	1	1	6	1	6	6

Rozw OL 2.2
Układ przekształcamy równoważnie przez dodanie do obu stron drugiego równania $a^2 + b^2 + c^2$:

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ 2(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2 \end{cases}$$

oraz podstawienie pierwszego równania do prawej strony drugiego i podzielenie przez 2:

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Popatrzmy na ten układ równań geometrycznie. Równanie $a^2 + b^2 + c^2 = 9/2$ opisuje pewną sferę o środku w $(0, 0, 0)$, a równanie $a + b + c = 3$ pewną płaszczyznę. Można policzyć rozwiązania tego układu stosując narzędzia geometrii analitycznej, my jednak pójdziemy trochę inną drogą.

Zauważmy, że trójka $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, a więc i trójki $B = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ oraz $A = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ spełniają ten układ. Płaszczyzna i sfera mają więc co najmniej trzy punkty przecięcia. Część wspólna płaszczyzny i sfery może być $\emptyset$, punktem lub okręgiem. W tym przypadku jest więc ona okręgiem o opisanym na trójkącie ABC, czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Pozostaje pokazać, że ten okrąg o nie zawiera punktów o ujemnych współrzędnych, czyli leży w zbiorze $\{a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0\}$.

Aby to udowodnić, wystarczy dowieść, że okrąg o nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną $c = 0$ innych niż $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, z płaszczyzną $a = 0$ innych niż A, a z płaszczyzną $b = 0$ innych niż B.

Załóżmy, że trójka $(a, b, 0)$ jest punktem okręgu o, czyli spełnia równania układu. Wtedy $a + b = 3$ oraz $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$, zatem $(a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = 9 - 9 = 0$, czyli $a = b = 3/2$, zatem $(a, b, 0) = C$. Pozostałych własności dowodzę analogicznie.

Rozw OL 2.3
Rozważmy $A_1, \ldots, A_{50}$. Suma tych zbiorów ma więcej niż $\frac{50}{51}n$ elementów, więc wśród nich istnieje taki, który ma więcej niż $\frac{n}{51}$ elementów. Dla uproszczenia oznaczeń załóżmy, że A_1 ma więcej niż $\frac{n}{51}$ elementów.

Zauważmy, że A_1 ma puste przecięcia z najwyżej 49 zbiorami spośród $A_2, \ldots, A_{101}$. Faktycznie, gdyby A_1 miało puste przecięcia z pewnymi 50 zbiorami, to miałoby puste przecięcie i z ich sumą. Ale suma tych zbiorów łączne z A_1 ma więcej niż $\frac{50}{51}n + \frac{1}{51}n = n$ elementów, zatem więcej niż X. Sprzeczność.

Zatem A_1 ma niepuste przecięcie z co najmniej 51 zbiorami, niech dla uproszczenia oznaczeń będą to zbiory $A_2, \ldots, A_{52}$.

Teraz powtarzamy powyższe rozumowanie.

Wśród 50 zbiorów $A_2, \ldots, A_{51}$ istnieje zbiór mający więcej niż $\frac{n}{51}$ elementów, niech będzie to A_2.

Rozumując jak wyżej dochodzimy do wniosku, że A_2 ma puste przecięcia z najwyżej 49 zbiorami, zatem A_2 ma niepuste przecięcie z pewnym zbiorem A_i z 50 zbiorów $A_3, \ldots, A_{52}$.

Każde dwa ze zbiorów A_1, A_2, A_i mają niepuste przecięcie.

6.3 Dzień III

Rozw OL 3.1
Niech x_1, x_2 będą rozwiązaniami danego równania. Ze wzorów Viete'a mamy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{k}$$

$$x_1x_2 = \frac{-bk + k^3}{k} = k^2 - b$$

Wyznaczamy a, b:

$$a = -k(x_1 + x_2)$$

$$b = k^2 - x_1x_2$$

Obliczamy $a^2 + b^2$:

$$a^2 + b^2 = k^2(x_1 + x_2)^2 + (k^2 - x_1x_2)^2 = k^2(x_1^2 + x_2^2) + 2k^2x_1x_2 + k^4 - 2k^2x_1x_2 + (x_1x_2)^2 =$$

$$= k^4 + k^2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1x_2)^2 = (k^2 + x_1^2)(k^2 + x_2^2)$$

Liczby k, x_1, x_2 są całkowite i niezerowe, zatem $k^2, x_1^2, x_2^2 \geqslant 1$, czyli $k^2 + x_1^2 \geqslant 2, k^2 + x_2^2 \geqslant 2$.

Wyrażenie $a^2 + b^2$ jest więc iloczynem dwóch liczb naturalnych większych od 1, zatem jest liczbą złożoną.

Rozw OL 3.2
Załóżmy, że taki trapez istnieje.

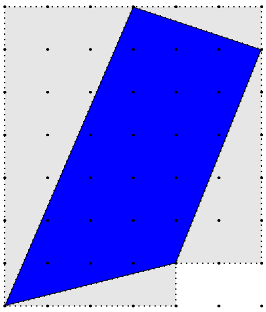
Oznaczmy wierzchołki trapezu jako $ABCD$; AB i CD są podstawami, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60°$. Oczywiście $AB > CD$.

Niech punkt E będzie taki, że $EDCB$ jest równoległobokiem. Wtedy $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABC = 60°$ i $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAD = 60°$, zatem AED jest trójkątem równobocznym.

Z definicji punkt E jest przesunięciem B o wektor CD, więc ma współrzędne całkowite.

Trójkąt AED jest równoboczny i wszystkie jego wierzchołki mają współrzędne całkowite. Dowód sprowadza się zatem do następującego:

Udowodnić, że nie istnieje trójkąt równoboczny, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite.



Załóżmy, że taki trójkąt istnieje. Zauważmy, że jeżeli ma on bok a, to liczba a^2 jest liczbą całkowitą.
Wielokąt wypukły, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite, ma pole postaci $\frac{1}{2}K$, gdzie K jest liczbą całkowitą. Faktycznie, jeżeli dobudujemy do boków trójkąty prostokątne, otrzymamy wielokąt o polu całkowitym, a dobudowywane trójkąty mają pola postaci $\frac{1}{2}\cdot$*liczba całkowita*, patrz rysunek.
A więc nasz trójkąt ma pole równe $\frac{1}{2}k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Z drugiej strony trójkąt równoboczny ma boku a ma pole równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$:

$$\frac{1}{2}k = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{2k}{a^2} = \sqrt{3}$$

Stwierdziliśmy wcześniej, że a^2, k są liczbami całkowitymi. Z powyższego wzoru wynika więc, że $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną, a to nieprawda. Sprzeczność.

Rozw OL 3.3

1	1	7	8
2	2	7	8
5	6	3	3
5	6	4	4

Wprowadźmy jakikolwiek układ współrzędnych na tej szachownicy. Każdy kwadrat 4×4, którego wierzchołki mają współrzędne całkowite i podzielne przez 4 kolorujemy jak na rysunku.
Zauważmy, że każdy prostokąt 1×5 odpowiadający pięciu pionkom w rzędzie lub kolumnie zakrywa pewną parę pól z tą samą liczbą wpisaną, leżących obok siebie.

1	1	7	8	1	1	7	8	1	1	7	8
2	2	7	8	2	2	7	8	2	2	7	8
5	6	3	3	5	6	3	3	5	6	3	3
5	6	4	4	5	6	4	4	5	6	4	4
1	1	7	8	1	1	7	8	1	1	7	8
2	2	7	8	2	2	7	8	2	2	7	8
5	6	3	3	5	6	3	3	5	6	3	3
5	6	4	4	5	6	4	4	5	6	4	4
1	1	7	8	1	1	7	8	1	1	7	8
2	2	7	8	2	2	7	8	2	2	7	8
5	6	3	3	5	6	3	3	5	6	3	3
5	6	4	4	5	6	4	4	5	6	4	4

Na przykładowym rysunku pionowy prostokąt zawiera 2 piątki, a poziomy – 2 dwójki.

Rozważmy następującą strategię Iwony:

Gdy Ireneusz stawia pionek na polu o pewnym numerze i, Iwona stawia pionek na sąsiadującym polu o numerze i.

Przy takiej strategii Iwony Ireneusz nie może ustawić pięciu pionków w rzędzie lub kolumnie, gdyż to oznaczałoby, że ustawił swoje pionki na obu polach pewnej pary, a to nie jest możliwe.

6.4 Mecz matematyczny

Rozw OL M.1
Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną

$$1 = \frac{a^{2010}+b^{2010}+c^{2010}+d^{2010}+e^{2010}}{2010} =$$

$$= \frac{\underbrace{\frac{1}{400}a^{2010}+\ldots+\frac{1}{400}a^{2010}}_{400}+\underbrace{\frac{1}{401}b^{2010}+\ldots+\frac{1}{401}b^{2010}}_{401}+\underbrace{\frac{1}{402}c^{2010}+\ldots+\frac{1}{402}c^{2010}}_{402}}{2010}+$$

$$+\frac{\underbrace{\frac{1}{403}d^{2010}+\ldots+\frac{1}{403}d^{2010}}_{403}+\underbrace{\frac{1}{404}e^{2010}+\ldots+\frac{1}{404}e^{2010}}_{404}}{2010} \geqslant$$

$$\geqslant a^{400}b^{401}c^{402}d^{403}e^{404}\sqrt[2010]{\frac{1}{400^{400}401^{401}402^{402}403^{403}404^{404}}}$$

Po przekształceniu otrzymujemy: $a^{400}b^{401}c^{402}d^{403}e^{404} \leqslant \sqrt[2010]{400^{400}401^{401}402^{402}403^{403}404^{404}}$.

Wartość ta jest osiągnięta, gdy między średnimi zachodzi równość, czyli kiedy spełniony jest warunek: $\frac{1}{400}a^{2010} = \frac{1}{401}b^{2010} = \frac{1}{402}c^{2010} = \frac{1}{403}d^{2010} = \frac{1}{404}e^{2010}$, który wraz z warunkiem $a^{2010}+b^{2010}+c^{2010}+d^{2010}+e^{2010} = 2010$ pociąga za sobą $a = \sqrt[2010]{400}, b = \sqrt[2010]{401}, c = \sqrt[2010]{402}, d = \sqrt[2010]{403}, e = \sqrt[2010]{404}$.

Sprawdzamy:

$(\sqrt[2010]{400})^{400}(\sqrt[2010]{401})^{401}(\sqrt[2010]{402})^{402}(\sqrt[2010]{403})^{403}(\sqrt[2010]{404})^{404} = \sqrt[2010]{400^{400}401^{401}402^{402}403^{403}404^{404}}$.

Największą możliwą wartością wyrażenia $a^{400}b^{401}c^{402}d^{403}e^{404}$ jest liczba $\sqrt[2010]{400^{400}401^{401}402^{402}403^{403}404^{404}}$.

Rozw OL M.2
Przekształcamy prawą stronę równania:

$$\frac{k+2k+\ldots+nk}{n} = \frac{kn(n+1)}{2n} = \frac{k(n+1)}{2}$$

Przeprowadzamy dowód nie wprost.

Załóżmy, że liczba całkowita a jest pierwiastkiem $W(x)$. Z twierdzenia Bèzouta wiemy że: $W(x) = (x-a)Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

Warunek z zadania przyjmuje postać:

$$(k-a)(2k-a)\dots(nk-a)\cdot Q(k)Q(2k)\dots Q(nk)=\frac{k(n+1)}{2}$$

Liczby $Q(k), Q(2k), \dots, Q(nk)$ są całkowite.

Liczby $k-a, 2k-a, \dots, nk-a$ dają różne reszty z dzielenia przez n. Jeżeli bowiem $ik-a \equiv jk-a \mod n$, dla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, to $n|(ik-a)-(jk-a) = k(i-j)$, a skoro k i n są względnie pierwsze to $n|i-j$, ale $0 \leqslant i-j < n$, zatem $i-j=0$, $i=j$.

Liczby $k-a, 2k-a, \dots, nk-a$ dają n różnych reszt, zatem wypełniają cały zbiór możliwych reszt z dzielenia przez n, w szczególności któraś z nich daje resztę 0 z dzielenia przez n.

Lewa strona warunku z zadania jest podzielna przez n, a więc i prawa jest podzielna:

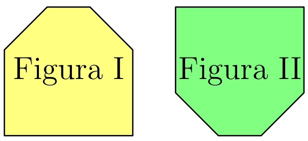
$$n\Big|\frac{k(n+1)}{2}.$$

Liczby k i n są względnie pierwsze, zatem $n|n+1$, a więc $n|n+1-n=1$, $n=1$, co stoi w sprzeczności z warunkiem $n>1$.

Rozw OL M.3

Figura I powstaje z kwadratu K o wymiarach 3×3 poprzez odcięcie dwóch górnych narożników w postaci trójkątów prostokątnych równoramiennych o przyprostokątnych długości 1, a jej środkiem nazwiemy środek kwadratu K.

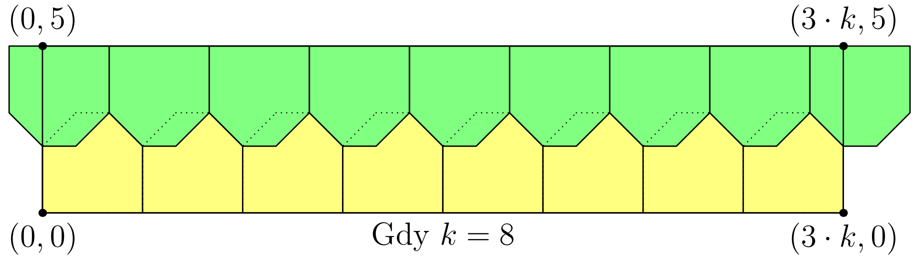
Figura II jest obrazem figury I w obrocie o kąt 180° wokół środka figury I. Środkiem figury II także nazwiemy środek kwadratu K.



Umieśćmy dany prostokąt w układzie współrzędnych w ten sposób, że jego wierzchołki znajdują się w punktach: $(0,5), (0,0), (3k,0), (3k,5)$.

Umieśćmy k figur I w tym prostokącie w następujący sposób: i-tą figurę I umieszczamy w ten sposób, że jej środek jest w punkcie $(\frac{3}{2}+3(i-1), \frac{3}{2})$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Następnie umieśćmy $k+1$ figur II w następujący sposób: środek i-tej figury znajduje się w punkcie $(\frac{1}{2}+3(i-1), \frac{7}{2})$, gdzie $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$. W ten sposób cały prostokąt został przykryty:



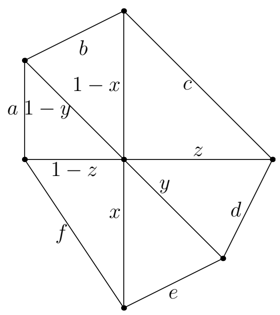
Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że skoro w prostokącie jest $2k+2$ punktów, a umieszczonych jest w nim $2k+1$ figur, które całkowicie pokrywają prostokąt (każdy punkt leży w którejś z figur), to w pewnej figurze znajdują się dwa punkty.

Wiadomo, że najdłuższy odcinek zawarty w wielokącie wypukłym jest jedną z przekątnych lub boków wielokąta, zatem najdłuższy odcinek zawarty w figurze I lub II ma długość $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, innymi słowy odległość między punktami leżącymi w jednej figurze jest nie większa niż $\sqrt{13}$.

Rozw OL M.4

Podpunkt a.

Poniższe rozwiązanie jest powtórzeniem rozwiązania zadania z grupy początkującej.



Zapiszmy sześciokrotnie nierówność trójkąta z oznaczeniami jak na rysunku:

$$a \leqslant (1-y)+(1-z) \quad b \leqslant (1-x)+(1-y) \quad c \leqslant (1-x)+z$$

$$d \leqslant y+z \quad e \leqslant x+y \quad f \leqslant (1-z)+x$$

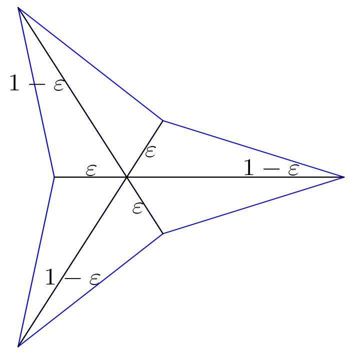
Dodając nierówności stronami otrzymujemy:

$$a+b+c+d+e+f \leqslant 6.$$

Widzimy zatem, że obwód danego sześciokąta nie może być większy niż 6.

Podpunkt b.

Rozważmy następującą sytuację: wszystkie odcinki dzielą się w takich samych stosunkach, patrz rysunek:



Stwierdzam, że jeżeli wezmę

$$\varepsilon < \frac{1}{12}\,(6-5.999999999)\,,$$

to obwód sześciokąta, czyli suma długości odcinków niebieskich, będzie większy od 5.999999999.
Zaiste dla każdego z trójkątów o jednym boku niebieskim, jednym długości ε a jednym długości $1-\varepsilon$ możemy zapisać nierówność trójkąta:

$$\text{niebieski bok} + \varepsilon \geqslant 1-\varepsilon$$

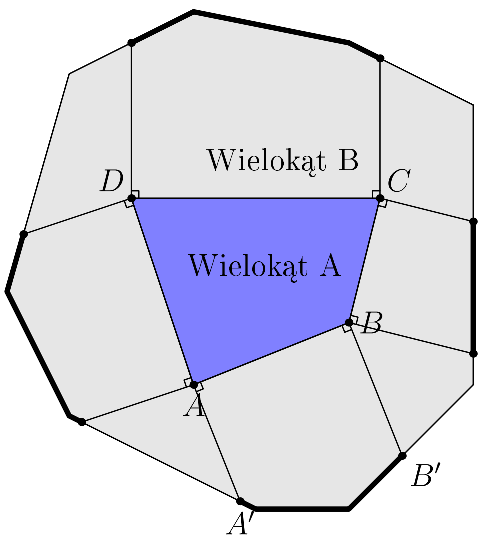
$$\text{niebieski bok} \geqslant 1-2\cdot\varepsilon$$

Sumując

$$\text{Obwód } \geqslant 6-12\varepsilon > 6-(6-5.999999999) = 5.999999999.$$

Widzimy, że istnieje sześciokąt o obwodzie większym niż 5.999999999.

Rozw OL M.5



Poprowadźmy przez wierzchołki A proste prostopadłe do odpowiednich boków A, jak na rysunku. Wielokąt A jest wypukły, więc fragmenty obwodu B odcięte przez kolejne proste (na rysunku pogrubione) są rozłączne. Aby udowodnić tezę, wystarczy więc pokazać, że długość boku jest nie większa od długości odpowiedniego fragmentu obwodu B np. na rysunku fragmentu pomiędzy A' i B'.
Proste AA' i BB' są równoległe i odległość pomiędzy tymi prostymi wynosi AB, bo AB jest prostopadły do tych prostych.
$A' \in AA', B' \in BB'$, więc odległość pomiędzy punktami A' i B' jest nie mniejsza niż odległość pomiędzy prostymi AA' i BB'.
Łącznie

$$\text{długość obwodu pomiędzy } A' \text{ i } B' \geqslant A'B' \geqslant AB$$

co kończy dowód.

Rozw OL M.6

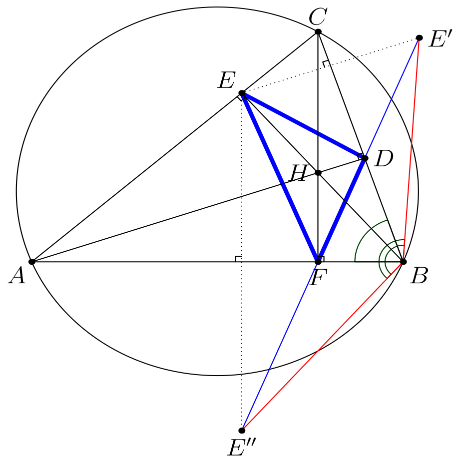
Lemat *Przy oznaczeniach z zadania $\sphericalangle EDA = \sphericalangle FDA$ innymi słowy wysokość AD jest dwusieczną w trójkącie DEF.*

Dowód lematu

Niech H oznacza ortocentrum trójkąta ABC. Mamy $\sphericalangle HEC = \sphericalangle HDC = 90°$, zatem $\sphericalangle HEC + \sphericalangle HDC = 180°$, czyli punkty H, E, C, D leżą na jednym okręgu.

Kąty $\sphericalangle ADE = \sphericalangle HDE$ i $\sphericalangle HCE$ są oparte na tym samym łuku, czyli $\sphericalangle HDE = \sphericalangle HCE = 90° - \sphericalangle CAB$.

Analogicznie przeliczam $\sphericalangle ADF = 90° - \sphericalangle CAB$. A więc $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ADE$. ■



Niech E', E'' będą odbiciami E względem BC, BA. Zauważmy, że $\sphericalangle E'DF = \sphericalangle EDF + 2 \cdot \sphericalangle EDC = 2 \cdot \sphericalangle EDA + 2 \cdot \sphericalangle EDC = 2 \cdot (\sphericalangle ADE + \sphericalangle EDC) = 2 \cdot 90° = 180°$. Punkty D, F, E' leżą więc na jednej prostej! Analogicznie dowodzę, że D, F, E'' leżą na jednej prostej. Reasumując E', D, F, E'' leżą na jednej prostej i

$$E'E'' = E'D + DF + FE'' = ED + DF + FE$$

Popatrzmy teraz na trójkąt $BE'E''$. W trójkącie tym $BE' = BE'' = BE$ i $\sphericalangle E'BE'' = \sphericalangle E'BE + \sphericalangle EBE'' = 2 \cdot (\sphericalangle CBE + \sphericalangle ABE) = 2\sphericalangle CBA$.

Rozważmy analogicznie odbicia Y', Y'' punktu Y względem BC, BA. Z nierówności trójkąta

$$Y'Y'' \leqslant Y'Z + ZX + XY'' = YZ + ZX + XY$$

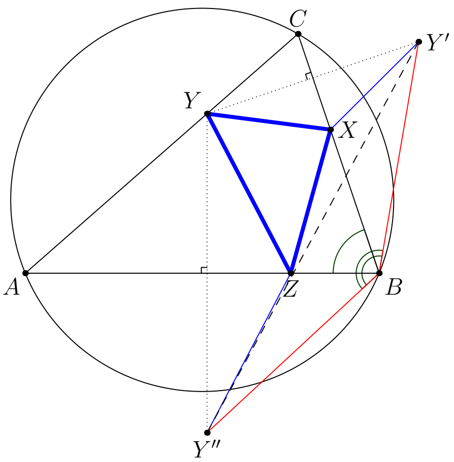
Aby pokazać tezę, wystarczy więc dowieść, że

$$E'E'' \leqslant Y'Y''.$$

Popatrzmy na trójkąt $Y'BY''$. Identycznie jak przy trójkącie $E'BE''$ dowodzimy, że $Y'B = Y''B = YB$ i $\sphericalangle Y'BY'' = 2\sphericalangle CAB$. Trójkąty $Y'BY''$ i $E'BE''$ są równoramienne i mają taki sam kąt pomiędzy ramionami. Zatem są one podobne. W szczególności

$$\frac{Y'Y''}{E'E''} = \frac{BY'}{BE'} = \frac{BY}{BE} \geqslant 1$$

gdyż wysokość jest najkrótszym odcinkiem pomiędzy B a bokiem AC.



Podsumowując:

$$ED + DF + FE = E'E'' \leqslant Y'Y'' \leqslant YZ + ZX + XY.$$

Rozw OL M.7

Aby rozwiązać to zadanie, wykorzystajmy metodę wielomianu pomocniczego.

Załóżmy, że (x, y, z) spełniają układ równań z zadania i weźmy wielomian postaci $W(x) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 + \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t + \sigma_3$. Zauważmy, że każdy ze współczynników σ można na mocy wzorów Viete'a przedstawić za pomocą wyrażeń z wyjściowego układu:

$$\sigma_1 = -(x + y + z) = -4$$

$$\sigma_2 = xy + yz + zx = \frac{1}{2}((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{1}{2}(16 - 78) = -31$$

$$\sigma_3 = -xyz$$

Aby obliczyć $\sigma_3 = -xyz$, zapiszmy jeden z ciekawszych wzorów skróconego mnożenia:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)) + 3xyz$$

$$226 = 4(78 + 31) - 3\sigma_3 \text{ więc } \sigma_3 = 70$$

Otrzymaliśmy zatem wielomian $W(x) = t^3 - 4t^2 - 31t + 70$, którego pierwiastki, a zarazem rozwiązania układu równań, znajdziemy w tradycyjny sposób.

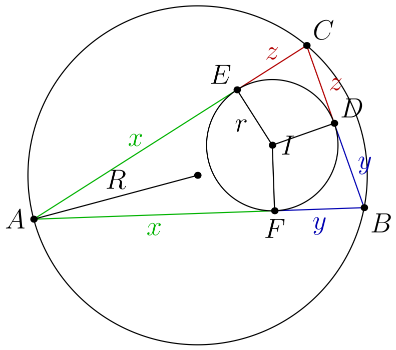
Nietrudno zauważyć, że jednym z pierwiastków jest 2. Stosując schemat Hornera z łatwością znajdujemy pozostałe pierwiastki: -5 i 7.

Otrzymaliśmy zatem rozwiązania – wszystkie permutacje trójki $(-5, 2, 7)$:

$$(-5, 2, 7), (-5, 7, 2), (2, -5, 7), (2, 7, -5), (7, 2, -5), (7, -5, 2)$$

Wszystkie przejścia w rozumowaniu były równoważne, zresztą nietrudno stwierdzić, że powyższe trójki spełniają układ równań z zadania.

Rozw OL M.8



Oznaczmy odległości wierzchołków A, B, C od punktów styczności sąsiednich boków z okręgiem wpisanym jako x, y, z odpowiednio. Zachodzą równości $AB = x + y,\ BC = y + z,\ CA = z + x$. Zapiszmy wzór na pole trójkąta na dwa sposoby:

$$P = (x + y + z)r = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4R}.$$

Porównując te wzory ze wzorem Herona:

$$P = \sqrt{(x + y + z)(x + y + z - x - z)(x + y + z - y - z)(x + y + z - x - y)} = \sqrt{(x + y + z)xyz},$$

wyznaczyć możemy długości promieni w zależności od x, y, z:

$$\sqrt{(x + y + z)xyz} = (x + y + z)r \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}$$

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4R} = \sqrt{(x + y + z)xyz} \Leftrightarrow R = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{(x + y + z)xyz}}.$$

Teza głosi, że $\frac{R}{r} \geqslant 2$, co równoważne jest nierówności

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{(x + y + z)xyz}} \cdot \sqrt{\frac{x + y + z}{xyz}} \geqslant 2.$$

Po przekształceniu otrzymujemy nierówność:

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz,$$

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{8} \geqslant xyz,$$

$$\frac{x + y}{2} \cdot \frac{y + z}{2} \cdot \frac{z + x}{2} \geqslant \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx} = \sqrt{x^2y^2z^2}.$$

Ostatnia nierówność jest iloczynem trzech nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną, które są prawdziwe dla wszystkich liczb dodatnich. Nierówność ta jest więc prawdziwa, a że jest ona równoważna tezie, to i teza jest prawdziwa.

Rozw OL M.9

Niech dla zwięzłości D oznacza zbiór $2n+1$ liczb z zadania, D_+ oznacza podzbiór liczb nieujemnych D, a D_- – podzbiór liczb ujemnych.

Rozważmy liczbę $a \in D$ mającą najmniejszą wartość bezwzględną spośród liczb z D.

Załóżmy, że $a \leqslant 0$.

Rozważmy zbiór

$$a + D_- = \{a + d \mid d \in D_-\}$$

Wszystkie elementy tego zbioru leżą w przedziale $[a - (2n - 1), a]$. Oczywiście w przedziale $[a - (2n - 1), -2n]$ może leżeć maksymalnie $-2n - (a - (2n - 1)) + 1 = -a$ liczb. Tak więc w przedziale $[-(2n - 1), a]$ leży co najmniej $|D_-| + a$ liczb (*liczba* $|D_-| + a$ *może być ujemna, ale w niczym nie psuje to rozwiązania*).

Z definicji a jako elementu mającego najmniejszą wartość bezwzględną wszystkie elementy D_+ leżą w $[|a|, 2n - 1]$, a więc wszystkie elementy zbioru $-D_+ = \{-d \mid d \in D_+\}$ leżą w przedziale $[-(2n - 1), a]$.

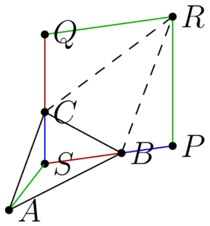
W przedziale $[-(2n-1), a]$ leży więc $|D_-|+a$ różnych elementów zbioru $a+D_-$ oraz $|D_+|$ różnych elementów zbioru $-D_+$.

Przedział ten ma długość $2n - 1 + a + 1$, a elementów jest łącznie $|D_-| + a + |D_+| = 2n + 1 + a$, czyli więcej niż wynosi długość przedziału. Zatem istnieją takie $b \in D_-, c \in D_+$ że

$$a + b = -c \text{ czyli } a + b + c = 0.$$

Gdy $a > 0$ rozważamy zbiór $a + D_+$, $-D_-$ i analogicznie dochodzimy do tezy.

Rozw OL M.10



Niech P i Q będą punktami leżącymi na przedłużeniach krawędzi SB i SC, tak aby $SP = SQ = SA$.
Rozważmy kwadrat $SPRQ$, a w nim trójkąty RCB, RCQ, RBP. Trójkąty RCQ i RBP są przystające odpowiednio do trójkątów ABS i ACS, a więc trójkąt RBC jest przystający do trójkąta ACB. Stąd

$$\sphericalangle CAS + \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAS = \sphericalangle PRB + \sphericalangle BRC + \sphericalangle CRQ = \sphericalangle PRQ = 90°.$$

6.5 Trudniejsze

Rozw OL T.1
Udowadniamy tezę przez indukcję po stopniu wielomianu P.

Baza indukcji – stopień 0. Jeżeli wielomian jest stopnia 0, to jest on stały, zatem teza zachodzi dla niego trywialnie.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że dla wielomianów stopnia mniejszego od n ($n < p$) teza zachodzi. Weźmy wielomian P stopnia n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

Rozważmy dwa przypadki:

(a) $p|a_n$. Wtedy wielomian $P(x) - a_n x^n$ jest stopnia mniejszego od n i dla każdej liczby całkowitej wartość $P(x) - a_n x^n$ jest podzielna przez p, zatem z założenia indukcyjnego $P(x) - a_n x^n$ jest podzielny przez p a więc i $P(x)$ jest podzielny przez p.

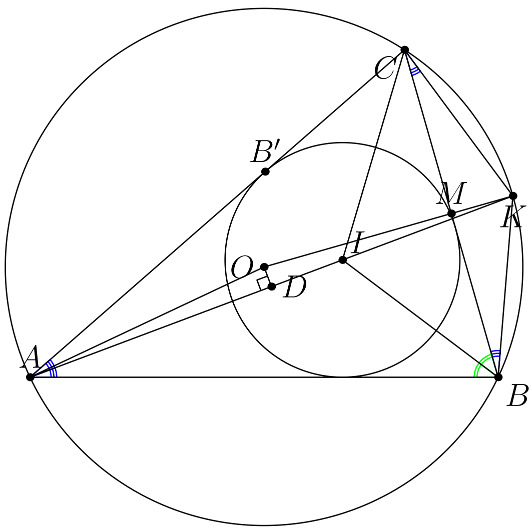
(b) $p \not| a_n$.

Rozważmy wielomian $Q(x) := P(x+1) - P(x) = n \cdot a_n x^{n-1} +$ wyrazy niższego stopnia.

Dla każdej liczby całkowitej wartości $P(x+1), P(x)$ są podzielne przez p, zatem i wartość $Q(x)$ jest podzielna przez p.

Wielomian Q jest stopnia mniejszego niż n i spełnia założenia, zatem z indukcji spełnia tezę. W szczególności współczynnik $n \cdot a_n$ jest podzielny przez p. Ale p jest liczbą pierwszą i $p \not| a_n$. Zatem $p|n$, $p \leqslant n$. Sprzeczność.

Rozw OL T.2



Skoro trójkąt ABC nie jest równoramienny, to punkty A, O, I nie leżą na jednej prostej. Przedłużmy odcinek AI i oznaczmy punkt jego przecięcia z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ jako K. Niech będzie D środkiem AK, wtedy $OD \perp AK$.
Oczywistym jest, że $\sphericalangle AIO \leqslant 90°$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt I leży po przeciwnej stronie punktu D niż punkt A, czyli gdy $AI \geqslant IK$.
Zauważmy, że $CK = BK$, gdyż odcinek AI zawiera się w dwusiecznej kąta BAC.

Lemat *Długość odcinka IK równa jest długości odcinków CK i BK.*

Dowód.

Oznaczmy $\sphericalangle CAK = \sphericalangle KAB = \alpha$ oraz $\sphericalangle ABI = \sphericalangle IBC = \beta$.

Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku $\sphericalangle CBK = \alpha$, więc $\sphericalangle IBK = \alpha + \beta$.

Ponadto $\sphericalangle AIB = 180° - \alpha - \beta$, a zatem $\sphericalangle BIK = \alpha + \beta$, więc trójkąt BKI jest równoramienny – $BK = IK$. ■

Zastosujmy znany fakt.

Twierdzenie (Ptolemeusza) *W dowolnym czworokącie $ABCD$ suma iloczynów długości przeciwległych boków jest większa bądź równa iloczynowi długości przekątnych:*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt da się wpisać w okrąg.

Skoro czworokąt $ABKC$ wpisany jest w okrąg, zachodzi $AB \cdot CK + AC \cdot BK = AK \cdot CB$.

Mając $CK = IK = BK$, możemy zapisać tę zależność w postaci:

$$AB \cdot IK + AC \cdot IK = BC \cdot (AI + IK) \Leftrightarrow AB + AC = BC + \frac{AI}{IK} BC$$

Zauważmy, że prawa strona równości jest większa lub równa $2BC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{AI}{IK} \geqslant 1$, czyli $AI \geqslant IK$, co jest równoważne nierówności $\sphericalangle AIO \leqslant 90°$. Tak więc udowodniliśmy, że $\sphericalangle AIO \leqslant 90° \Leftrightarrow 2BC \leqslant AB + AC$.

Inne rozwiązanie
Zadanie to można rozwiązać nie znając twierdzenia Ptolemeusza.

Tak jak w poprzednim rozwiązaniu dowodzimy, że $\sphericalangle AIO \leqslant 90° \Leftrightarrow AI \geqslant IK$ oraz $BK = CK = IK$.

Niech B' oznacza punkt styczności okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ z AC, zaś M oznacza środek boku BC.

Zachodzą równości kątów $\sphericalangle MCK = \sphericalangle CAK$ oraz $\sphericalangle CMK = \sphericalangle AB'I = 90°$. Zatem trójkąty $\triangle AIB'$ i $\triangle CKM$ są podobne. Z podobieństwa tych trójkątów wynika

$$\frac{IK}{AI} = \frac{CK}{AI} = \frac{CM}{AB'} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}(AB + AC - BC)} = \frac{BC}{AB + AC - BC}.$$

Tak więc $IK \leqslant AI \Leftrightarrow BC \leqslant AB + AC - BC \Leftrightarrow 2 \cdot BC \leqslant AB + AC$.

Rozw OL T.3

Funkcja taka istnieje.

Niech Tri będzie zbiorem takich liczb, w których rozkładzie na czynniki pierwsze trójka występuje w nieparzystej potędze, w szczególności liczby ze zbioru Tri są podzielne przez 3.

Szukana funkcja ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x \text{ dla } x \in Tri \\ 15x \text{ dla } x \notin Tri \end{cases}$$

Funkcja f dla naturalnych argumentów przyjmuje naturalne wartości. Dla elementów z jednego ze zbiorów $Tri, \mathbb{Z}_+ - Tri$ funkcja f przyjmuje wartości ze zbioru drugiego.

Przy dwukrotnym złożeniu funkcji wykonane zostaną więc oba działania, mianowicie $f(f(x)) = \frac{1}{3} \cdot 15x = 5x$ lub $f(f(x)) = 15 \cdot \frac{1}{3}x = 5x$.

Rozw OL T.4

Rozwiązanie poprzedzimy dwoma uwagami.

Uwaga *Dla każdych i, N_a, N_b, N_c naturalnych istnieje takie $i' > i$, że*

$$a_{i'} > N_a \quad b_{i'} > N_b \quad c_{i'} > N_c.$$

Dowód uwagi

Liczb całkowitych dodatnich nie większych od N_a jest N_a i każda z nich może się pojawiać w ciągu (a_n) co najwyżej raz, zatem co najwyżej N_a wyrazów ciągu $(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots)$ może być nie większych od N_a.

Identyczne rozumowanie pokazuje, że co najwyżej N_b wyrazów ciągu $(b_{i+1}, b_{i+2}, \ldots)$ jest nie większych od N_b i co najwyżej N_c wyrazów ciągu $(c_{i+1}, c_{i+2}, \ldots)$ jest nie większych od N_c.

Rozważmy dowolny indeks $j > i$.

Nie spełnia on warunków na i' z uwagi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_j \leqslant N_a$ lub $b_j \leqslant N_b$ lub $c_j \leqslant N_c$, czyli gdy j jest jednym z co najwyżej $N_a + N_b + N_c$ indeksów. Ale w ciągu $(i + 1, i + 2, \ldots)$ jest nieskończenie wiele (a więc więcej niż $N_a + N_b + N_c$) indeksów, więc istnieje indeks, który spełnia warunki na i'. ■

Uwaga *Dla dowolnego i istnieje takie $i' > i$, że $a_i < a_{i'}$, $b_i < b_{i'}$ oraz $c_i < c_{i'}$.*

Dowód.

Wystarczy zastosować poprzednią uwagę dla $N_a := a_i$, $N_b := b_i$, $N_c := c_i$. ■

Przystąpmy do dowodu zadania. Skonstruujemy ciąg (i_s) indukcyjnie.

Wybieramy $i_1 := 1$.

Jeżeli mamy wybrane $(i_1, \ldots, i_k)$, to z drugiej uwagi istnieje $i' > i_k$ takie, że $a_{i'} > a_{i_k}$, $b_{i'} > b_{i_k}$ oraz $c_{i'} > c_{i_k}$. Kładziemy $i_{k+1} := i'$, tak więc

$$a_{i_{k+1}} > a_{i_k},\ b_{i_{k+1}} > b_{i_k} \text{ oraz } c_{i_{k+1}} > c_{i_k}.$$

Przez indukcję skonstruowaliśmy nieskończony ciąg (i_s), powyższe nierówności wskazują, że spełnia on założenia z zadania.

Rozdział 7

Wykłady

7.1 ε-otoczki

Definicja *ε-otoczką figury $\mathcal{F}$ nazwiemy figurę złożoną ze wszystkich punktów odległych od $\mathcal{F}$ o co najwyżej ε.*

Własności i przykłady:

- Figura $\mathcal{F}$ jest równa 0-otoczce $\mathcal{F}$.
- Dla $\varepsilon \leqslant \varphi$ ε-otoczka $\mathcal{F}$ jest zawarta w φ-otoczce $\mathcal{F}$, a wiec każda otoczka $\mathcal{F}$ zawiera figurę $\mathcal{F}$.
- ε-otoczką koła o środku O i promieniu r jest koło o środku O i promieniu $r+\varepsilon$ (mówimy tutaj o ε-otoczce w dwóch wymiarach).
- ε-otoczka sześcianu o krawędzi a to "sześcian z zaokrąglonymi rogami" i ma ona objętość $a^3 + 6a^2\varepsilon + 3\pi \cdot a\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$.
- Figury $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ są odległe o więcej niż ε wtedy i tylko wtedy, gdy ich $\frac{\varepsilon}{2}$-otoczki są rozłączne.

7.1.1 Zadania

OL W1.1
W kwadracie o boku 10 umieszczono 70 odcinków długości 1. Udowodnij, że pewne dwa z tych odcinków leżą w odległości mniejszej niż 1.

OL W1.2
Kwadrat 1×1 jest pokryty przez n kół. Udowodnij, że można wybrać spośród nich koła o łącznym polu nie mniejszym niż 1/9, z których każde dwa są rozłączne.

OL W1.3
Sześcian $1 \times 1 \times 1$ jest pokryty przez n kul. Udowodnij, że można wybrać spośród nich kule o łącznej objętości nie mniejszej niż 1/27, z których każde dwie są rozłączne.

OL W1.4
W kwadracie o boku 15 leży 20 parami rozłącznych kwadratów o boku 1. Udowodnij, że jest możliwe umieszczenie w dużym kwadracie koła o promieniu 1, nieprzecinającego wnętrza żadnego z kwadracików.

OL W1.5
Figurę złożoną z przekątnych kwadracika jednostkowego nazwiemy X. Udowodnij, że w kole o promieniu 1000 może umieścić tylko skończenie wiele parami nieprzecinających się X-ów.

OL W1.6
Danych jest n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Odległość pomiędzy każdymi dwoma z tych punktów wynosi więcej niż 2.

Figura $\mathcal{F}$ ma pole mniejsze niż π. Udowodnij, że istnieje taki wektor o długości nie większej niż 1, że $\mathcal{F}$ przesunięta o ten wektor nie zawiera żadnego z punktów $A_1, \ldots, A_n$.

OL W1.7
Zaznaczmy na szachownicy 8×8 środki wszystkich pól. Czy można tak narysować 13 prostych dzielących szachownicę, aby w każdym fragmencie był nie więcej niż 1 zaznaczony punkt?

7.2 Ciągi jednomonotoniczne

7.2.1 Teoria

Ze względu na wygodę wprowadza się zwykle zapis, który nie jest na początku zbyt intuicyjny, ale potem okazuje się być czytelniejszy.

Załóżmy, że mamy skończenie wiele ciągów: $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), \ldots$.

Oznaczamy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} = a_1 b_1 c_1 \cdot \ldots + a_2 b_2 c_2 \cdot \ldots + \ldots + a_n b_n c_n \cdot \ldots$$

czyli sumę iloczynów wszystkich kolumn. Ważne, że wartość tego iloczynu nie zmienia się przy zamianie kolumn ani wierszy, np. $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$

Twierdzenie (Nierówność dla dwóch ciągów jednomonotocznicznych) *Załóżmy, że mamy dane n-elementowe ciągi **niemalejące** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, a ciąg $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ jest dowolną permutacją ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Wtedy*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix}$$

Innymi słowy: jeżeli robimy iloczyny wyrazów z dwóch ciągów, to największą wartość uzyskamy stosując zasadę "największy z największym".

Szkic dowodu

Na początek udowadniany twierdzenie dla ciągów dwuelementowych: zakładamy, że $a_1 \leqslant a_2$ i $b_1 \leqslant b_2$. Jedyna nietrywialna permutacja (b_1, b_2) to ciąg (b_2, b_1), więc teza przekształca się równoważnie do:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \geqslant 0$$

co jest prawdą.

W ogólnym przypadku (dla ciągów n-elementowych) pokazujemy, że da się stopniowo dojść od $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix}$ do $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$ nie zmniejszając wartości w żadnym kroku.

W $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix}$ wybieramy kolumnę, w której jest wyraz równy b_1, załóżmy że jest to k-ta kolumna:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b_1 & \ldots & b'_n \end{bmatrix}$$

Z uprzednio udowodnionej nierówności wynika ($a_1 \leqslant a_k$ i $b_1 \leqslant b'_1$), że $\begin{bmatrix} a_1 & a_k \\ b'_1 & b_1 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_k \\ b_1 & b'_1 \end{bmatrix}$, a stąd

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_n \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k & \ldots & a_n \\ b_1 & b'_2 & \ldots & b'_1 & \ldots & b'_n \end{bmatrix}.$$

Analogicznie "sortujemy" ciąg $(b_1, b'_2, \ldots, b'_1, \ldots, b'_n)$, potem $(b_1, b_2, \ldots)$, itd. aż do otrzymania $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. ■

7.2.2 Zadania

OL W2.1
Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi

$$a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$$

OL W2.2
Wykaż, że jeżeli liczby a, b są dodatnie, to

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

OL W2.3
Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

OL W2.4
Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

OL W2.5
Udowodnij:

Twierdzenie *Nierówność Czebyszewa*

Ciągi (a_n) i (b_n) są niemalejące. Udowodnij, że

$$n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n).$$

7.2.3 Uogólniona teoria

Twierdzenie *Jeżeli ciągi $(a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}), (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}), \ldots, (a_{k,1}, \ldots, a_{k,n})$ są niemalejące i mają wyrazy **nieujemne**, to*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \ldots & a'_{1,n} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & \ldots & a'_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{k,1} & a'_{k,2} & \ldots & a'_{k,n} \end{bmatrix}$$

gdzie ciąg $(a'_{i,1}, a'_{i,2}, \ldots, a'_{i,n})$ jest permutacją ciągu $(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$.

ZARYS DOWODU
Dowód jest analogiczny do dowodu poprzedniego twierdzenia. Najpierw wprost udowadniamy twierdzenie dla $n = 2$, a potem korzystamy z tego wyniku w ogólnym przypadku. Po szczegóły odsyłam np. do książki "Wędrówki po krainie nierówności", podrozdział 4.3. ■

7.2.4 Zadania II

OL W2.6

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \dots, a_n$ zachodzi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

OL W2.7

Udowodnij, że jeżeli a, b, c są dodatnie, to

$$a^7 + b^7 + c^7 \geqslant a^2 b^2 c^2 (a + b + c)$$

OL W2.8

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 3$. Udowodnij, że

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqslant 6$$

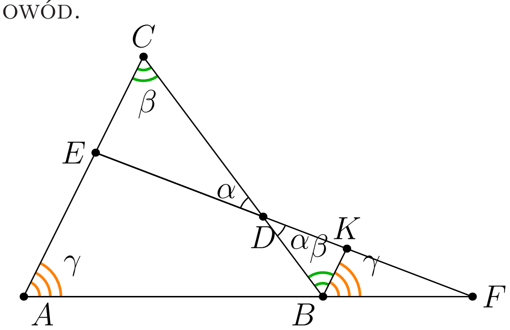
7.3 Menelaos i Ceva

7.3.1 Teoria

Twierdzenie (Menelaosa) *Dany jest ΔABC i prosta przecinająca boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E oraz przedłużenie boku AB w punkcie F. Wówczas zachodzi:*

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot DC \cdot EA$$

DOWÓD.



Poprowadźmy prostą równoległą do AC przechodzącą przez B i oznaczmy jako K punkt jej przecięcia z prostą DF. Otrzymujemy trójkąty podobne BKF i AEF, dla których możemy zapisać proporcje

$$\frac{BF}{AF} = \frac{BK}{AE}.$$

Zauważmy, że również trójkąty ECD i KBD są do siebie podobne, zatem

$$\frac{CD}{DB} = \frac{EC}{BK}.$$

Z równości tych możemy zapisać

$$\frac{BF \cdot AE}{AF} = BK = \frac{EC \cdot DB}{CD},$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{BF \cdot DC \cdot EA} = 1$$

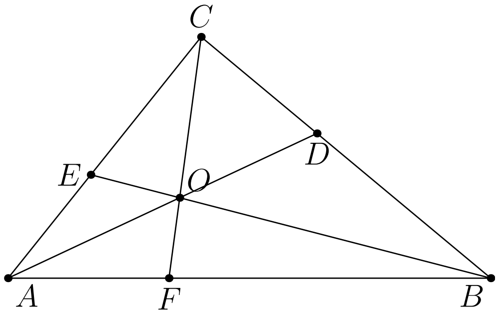
równoważną żądanej równości. ■

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Menelaosa.

Twierdzenie (Cevy) *Jeśli trzy proste AD, BE, CF przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie, to zachodzi:*

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA.$$

Dowód.



Rozpatrzmy zależności pomiędzy bokami i polami trójkątów o podstawach zawierających się w AB. Mamy zatem

$$\frac{AF}{FB} = \frac{P_{AFC}}{P_{FBC}} = \frac{P_{AFO}}{P_{BFO}}$$

Prowadzi to do równości

$$\frac{AF}{FB} = \frac{P_{AFC} - P_{AFO}}{P_{FBC} - P_{BFO}} = \frac{P_{ACO}}{P_{BCO}}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{BD}{DC} = \frac{P_{BAO}}{P_{CAO}}$$

oraz

$$\frac{CE}{EA} = \frac{P_{CBO}}{P_{ABO}}.$$

Z trzech powyższych równości mamy:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{P_{ACO}}{P_{BCO}} \cdot \frac{P_{BAO}}{P_{CAO}} \cdot \frac{P_{CBO}}{P_{ABO}} = 1$$

■

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Cevy prawdziwe jest wtedy i tylko wtedy, gdy proste AD, BE, CF nie są równoległe.

7.3.2 Zadania

OL W3.1
Udowodnić (korzystając z powyższej teorii), że w dowolnym trójkącie w jednym punkcie przecinają się:

(a) wysokości;

(b) środkowe;

(c) dwusieczne.

OL W3.2
Udowodnić twierdzenie Cevy za pomocą twierdzenia Menelaosa.

OL W3.3
W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, punkt E leży na boku BC tak, że $BE = 2EC$, a kąty ADC i BAE są równe. Wyznaczyć miarę kąta BAC.

OL W3.4
Na przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC obrano punkt D taki, że $AB = CD$. Udowodnij, że w trójkącie ABD dwusieczna kąta A, środkowa wychodząca z wierzchołka B i wysokość poprowadzona z wierzchołka D przecinają się w jednym punkcie.

OL W3.5
Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC wybrano punkty A_1, B_1, C_1 takie, że odcinki AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w jednym punkcie. Proste A_1B_1 i A_1C_1 przecinają prostą równoległą do BC przechodzącą przez A w punktach X i Y. Wykazać, że $AX = AY$.

OL W3.6
Dane są trzy okręgi: o_1, o_2, o_3 o środkach odpowiednio O_1, O_2, O_3. Wspólne styczne wewnętrzne okręgów o_2 i o_3 przecinają się w punkcie P_1, okręgów o_3 i o_1 w punkcie P_2, okręgów o_1 i o_2 w punkcie P_3. Udowodnij, że proste O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3 przecinają się w jednym punkcie.

OL W3.7
W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie E, a przedłużenia boków AD i BC w F. Udowodnij, że środki odcinków AB, CD, EF leżą na jednej prostej.

7.4 Pochodne wielomianów

7.4.1 Teoria

Definicje

Definicja (Pochodna wielomianu.) *Pochodną wielomianu* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *nazywamy wielomian* $f'(x)$ *postaci*

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 2 \cdot x + a_1 \cdot 1$$

Wszystkie rozważane poniżej wielomiany mają współczynniki rzeczywiste, aczkolwiek to założenie nie jest zawsze potrzebne.

Niech $f(x), g(x)$ będą dowolnymi wielomianami, a c liczbą.

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące własności pochodnej:

1 $(cf(x))' = cf'(x)$,

2 $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

3 $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wielomianem stałym.

Pochodna ma jeszcze jedną własność, bardzo ułatwiającą liczenie:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Szkic dowodu własności

Jeżeli $f(x) = a_nx^n$ i $g(x) = b_mx^m$ to

$$f'(x) = a_nnx^{n-1}, \quad g'(x) = b_mmx^{m-1}, \quad (f(x)g(x))' = (a_nb_mx^{n+m})' = a_nb_m(n+m)x^{n+m-1} =$$

$$a_nb_mnx^{n+m-1} + a_nb_mmx^{n+m-1} = a_nnx^{n-1}b_mx^m + a_nx^nb_mmx^{m-1} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ogólny przypadek sprowadza się do tego przez korzystanie z $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$. ■

Przykład:
$((x+1)(x^2-x+1)+3x)' = (x+1)'(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)'+3 = x^2-x+1+(x+1)(2x-1)+3 = 3x^2+3$. Albo inaczej:
$(x+1)(x^2-x+1)+3x = x^3+3x+1$ więc $((x+1)(x^2-x+1)+3x)' = (x^3+3x+1)' = 3x^2+3$.

Pierwiastki

Definicja *Mówimy, że liczba a jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ jeżeli $f(x) = (x-a)^k g(x)$ dla pewnego wielomianu $g(x)$.*

Ta definicja ma sens tylko jeśli $k > 0$ i tylko dla $k > 0$ definiujemy pierwiastek k-krotny.

"Zwykłe" pierwiastki wielomianu to dokładnie 1-krotne pierwiastki. Mówi o tym tw. Bézout.

Lemat *Niech $k \geqslant 2$.*

Wielomian $W(x)$ ma pierwiastek k-krotny a wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$ i $W'(x)$ ma pierwiastek $k-1$ krotny a.

Dowód.

$\Rightarrow$

Wielomian $W(x)$ możemy przedstawić w postaci $W(x) = (x-a)^k \cdot V(x)$. Oczywiste jest więc, że $W(a) = 0$.

Obliczam W':

$$W'(x) = ((x-a)^k \cdot V(x))' = ((x-a)^k)'V(x) + (x-a)^k V'(x) =$$

$$(k(x-a)^{k-1})V(x) + (x-a)^k V'(x) = (x-a)^{k-1}(kV(x) + (x-a)V'(x))$$

Tak więc W' ma pierwiastek $k-1$ krotny a.

$\Leftarrow$

Niech $W'(x) = (x-a)^{k-1}S(x)$.

Załóżmy, że $W(x) = (x-a)^l V(x)$ i $V(x)$ nie jest podzielne przez $x-a$, innymi słowy $V(a) \neq 0$. Wiemy, że $l \geqslant 1$, chcemy wykazać $l \geqslant k$.

Załóżmy przeciwnie: $l < k$.

$$(x-a)^{k-1}S(x) = W'(x) = ((x-a)^l)'V(x) + (x-a)^l V'(x) =$$

$$l(x-a)^{l-1}V(x) + (x-a)^l V'(x) = (x-a)^{l-1}(lV(x) + (x-a)V'(x))$$

$$(x-a)^{k-l}S(x) = lV(x) + (x-a)V'(x)$$

$$(a-a)^{k-l}S(a) = lV(a) + (a-a)V'(x), \quad lV(a) = 0, V(a) = 0.$$

Doszliśmy do sprzeczności. ■

Lemat (O maksimum wielomianu) *Jeżeli x_0 jest takie, że dla x dostatecznie bliskich x_0 (tzn. dla x leżących w pewnym ustalonym przedziale otwartym zawierającym x_0) zachodzi $W(x) \leqslant W(x_0)$ to $W'(x_0) = 0$.*

Dowód.

Niestety dowód musi być nieco formalny, żeby precyzyjnie ująć "dla x leżących w pewnym przedziale otwartym zawierającym x_0".

Niech $M := W(x_0)$. Rozważmy wielomian

$$P(x) := W(x) - M.$$

$P(x_0) = W(x_0) - M = 0$. Z twierdzenia Bèzout wynika, że $P(x) = (x-x_0)Q(x)$.

Będziemy starali się wykazać, że $Q(x_0) = 0$.

Załóżmy, że przedział z zadania to $(x_0 - a, x_0 + a)$ tzn. że dla $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ zachodzi $W(x) \leqslant W(x_0)$.

Nierówność $W(x) \leqslant W(x_0)$ jest równoważna $P(x) \leqslant P(x_0) = 0$, czyli

$$(x-x_0)Q(x) \leqslant 0$$

Dla $x \in (x_0 - a, x_0)$ jest $x - x_0 < 0$, a więc $Q(x) < 0$.

Dla $x \in (x_0, x_0 + a)$ zachodzi natomiast $x - x_0 > 0$ a więc $Q(x) > 0$.

Stąd wnioskujemy (jako że wielomian jest funkcją ciągłą), że $Q(x_0) = 0$, z twierdzenia Bèzout $Q(x) = (x - x_0)R(x)$.

Podstawiając: $P(x) = (x - x_0)Q(x) = (x - x_0)^2R(x)$. Wielomian $P(x)$ ma pierwiastek dwukrotny w x_0, zatem z poprzedniego lematu jego pochodna ma pierwiastek w x_0:

$$P'(x_0) = 0$$

Ale $P'(x) = (W(x) - M)' = W'(x) - (M)' = W'(x)$, więc $W'(x_0) = 0$. ■

Lemat (O minimum wielomianu) *Jeżeli x_0 jest takie, że dla x dostatecznie bliskich x_0 (tzn. dla x leżących w pewnym ustalonym przedziale otwartym zawierającym x_0) zachodzi $W(x) \geqslant W(x_0)$, to $W'(x_0) = 0$.*

Dowód.

Wystarczy zastosować powyższy lemat o maksimum wielomianu do wielomianu $-W(x)$. ■

7.4.2 Zadania

OL W4.1

Niech $f(x) = x^n - mx^{n-1} + mx - 1$, gdzie n, m $(n \geqslant 3)$ są liczbami naturalnymi. Wyznacz takie wartości m i n, aby wielomian $f(x)$ był podzielny przez $(x - 1)^2$.

OL W4.2

Wykaż, że dla żadnego $n = 1, 2, \ldots$ wielomian

$$Q(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

nie ma pierwiastków wielokrotnych.

OL W4.3

Wielomian $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ spełnia warunki

$$P(1) = 0 \text{ oraz } P(x) \geqslant 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

Udowodnij, że $a_n + 2a_{n-1} + \ldots + (n + 1)a_0 = 0$.

OL W4.4

Wielomiany $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_0$ oraz $Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$ spełniają warunek

$$P(x)^2 = (x^2 - 1)Q(x)^2 + 1$$

Udowodnij, że

$$P'(x) = nQ(x)$$

OL W4.5

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $n^{n-1} - 1$ jest podzielna przez $(n - 1)^2$.

OL W4.6

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $n^n - n^2 + n - 1$ dzieli się przez $(n - 1)^2$.

OL W4.7

Uzasadnij, że jeżeli $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \ldots \leqslant x_k$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, to w każdym przedziale (być może będącym punktem) $[x_i, x_{i+1}]$ leży pierwiastek $W'(x)$, wzmacniając tezę wywnioskuj, że jeżeli W ma n pierwiastków, to jego pochodna ma $n - 1$.

Rozdział 8

Wskazówki do wykładów

PROSERWY 2010
obóz informatyczno - matematyczny

8.1 ε-otoczki

Wskazówka OL W1.1

Rozważ 1/2-otoczki odcinków. Nie mieszczą się one w 1/2-otoczce kwadratu (policz!).

Wskazówka OL W1.2

Rozważ dla każdego okręgu o o promieniu r $2r$-otoczkę. Udowodnij, że jeżeli inny okrąg o promieniu nie większym niż r wystaje poza tę otoczkę, to jest rozłączny z o.

Wybieraj okręgi zaczynając od tego o największym promieniu.

Wskazówka OL W1.3

Przenieś w przestrzeń rozumowanie z zadania o kwadracie i okręgach.

Wskazówka OL W1.4

Rozważmy dowolny kwadrat K. Obszar, na którym leżą środki okręgów (o promieniu 1) przecinających K to 1-otoczka K – ma ona pole $5 + \pi$.

Rozważmy kwadrat o boku 13 umieszczony centralnie w dużym kwadracie. Ma on pole $13^2 > 20(5+\pi)$, więc istnieje w nim punkt nieleżący w żadnej ε-otoczce.

Wskazówka OL W1.5

Dla każdego X rozważ okrąg o promieniu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i środku w środku X. Udowodnij, że jeżeli dwa takie okręgi przecinają się, to X-y również.

Wskazówka OL W1.6

Rozważ koła jednostkowe $S_1, S_2, \ldots, S_n$ o środkach w $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Skoro odległości są większe niż 2, to koła $S_1, S_2, \ldots, S_n$ są rozłączne.

Rozważ teraz $S_1 \cap \mathcal{F}, S_2 \cap \mathcal{F}, \ldots, S_n \cap \mathcal{F}$. Te figury są także rozłączne, zatem suma ich pól wynosi nie więcej niż $|\mathcal{F}| < \pi$.

Zaznacz dowolny punkt O, koło jednostkowe o o środku w O i dowolny punkt B leżący wewnątrz o. Zauważ, że w figurze $\mathcal{F} + \overrightarrow{BO}$ leży punkt A_i wtedy i tylko wtedy gdy $A_i + \overrightarrow{OB}$ leży w $S_i \cap \mathcal{F}$ (zrób rysunek!), czyli gdy B leży w $S_i \cap \mathcal{F} + \overrightarrow{A_iO}$.

Figury $S_1 \cap \mathcal{F} + \overrightarrow{A_1O}, S_2 \cap \mathcal{F} + \overrightarrow{A_2O}, \ldots, S_n \cap \mathcal{F} + \overrightarrow{A_nO}$ leżą w o i mają łączne pole mniejsze niż π. Zatem w o istnieje punkt B_0 nieleżący w żadnej z tych figur. Wektor $\overrightarrow{B_0O}$ jest szukanym wektorem.

Wskazówka OL W1.7

Rozważmy punkty leżące na obwodzie szachownicy i połączmy kolejne odcinkami. Każda z prostych może przecinać najwyżej dwa z tych odcinków, a odcinków jest $28 > 2 \cdot 13$.

8.2 Ciągi jednomonotoniczne

Wskazówka OL W2.1

Po ewentualnej zamianie zmiennych można założyć, że $a \geqslant b$, więc ciągi (a, b) i (a^2, b^2) są niemalejące:

$$a^3 + b^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a & b \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix} = ab^2 + a^2 b$$

Wskazówka OL W2.2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{\sqrt{b}} & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \frac{1}{\sqrt{b}} \end{bmatrix}$$

Wskazówka OL W2.3

Nierówność jest symetryczna (sprawdź!), więc można założyć $a \leqslant b \leqslant c$. Wtedy $\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a+c} & \frac{1}{b+a} & \frac{1}{c+b} \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}$ Łącznie

$$2\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}\right) \geqslant \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant a+b+c$$

Wskazówka OL W2.4

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} a & b & c \\ b^2 & c^2 & a^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}$$

Wskazówka OL W2.5

Rozważmy n różnych permutacji ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ i zsumujmy n nierówności.

Wskazówka OL W2.6

Aby udowodnić pierwszą część nierówności, rozważmy n ciągów o wyrazach $(\sqrt[n]{a_1}, \sqrt[n]{a_2}, \ldots, \sqrt[n]{a_n})$. Wtedy w twierdzeniu lewa strona nierówności wynosi $a_1 + \ldots + a_n$. Trzeba tak ustawić permutacje, żeby otrzymać z prawej strony $n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Do dowodu drugiej nierówności stosujemy nierówność Czebyszewa z obydwoma ciągami równymi $(a_1, \ldots, a_n)$.

Wskazówka OL W2.7

Ze względu na symetryczność zakładamy $a \leqslant b \leqslant c$. Rozważmy ciągi (a^2, b^2, c^2), (a^2, b^2, c^2), (a^3, b^3, c^3).

Wskazówka OL W2.8

Załóżmy $a \leqslant b \leqslant c$. Najpierw stosujemy nierówność Czebyszewa, aby otrzymać

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqslant \frac{1}{3}(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

Pozostaje uzasadnić, że ostatni nawias przyjmuje wartości nie mniejsze niż 3. Można tutaj stosować nierówność pomiędzy średnimi potęgowymi lub klasyczne nierówności pomiędzy średnimi.

8.3 Menelaos i Ceva

Wskazówka OL W3.1

We wszystkich trzech przypadkach korzystamy oczywiście z twierdzenia Cevy.

(a) Należy znaleźć trójkąty podobne, zapisać odpowiednie proporcje i wyciągnąć wnioski.

(b) Wystarczy zauważyć, jak środkowe dzielą boki.

(c) Trzeba trzykrotnie skorzystać z twierdzenia o dwusiecznej.

Wskazówka OL W3.2

Wystarczy zapisać twierdzenie Menelaosa dla dwóch sąsiednich trójkątów (dopełniających się do dużego trójkąta).

Wskazówka OL W3.3

Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta DBC wynika, że $DK = KC$. To już wystarczy do wyznaczenia miary kąta.

Wskazówka OL W3.4

Trzeba skorzystać z twierdzenia o dwusiecznej i twierdzenia Talesa (skoro wysokość poprowadzona z D jest równoległa do BC), a otrzymane zależności sprowadzić do twierdzenia Cevy.

Wskazówka OL W3.5

Należy skorzystać z trójkątów podobnych (kąty wierzchołkowe przy B_1 i C_1) oraz twierdzenia Cevy dla trójkąta ABC.

Wskazówka OL W3.6

Wystarczy znaleźć pary trójkątów podobnych i zapisać proporcje, korzystając na przykład z długości promieni. Łącząc wszystkie zależności, otrzymujemy założenie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy.

Wskazówka OL W3.7

Warto zastosować jednokładność o środku w środku ciężkości trójkąta BDF i skali $-\frac{1}{2}$ oraz przedłużyć bok równoległy do DB aż do przecięcia z CD. Możemy zauważyć, że stosunki boków z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta BDF równe są stosunkom boków z nowo otrzymanego trójkąta.

8.4 Pochodne wielomianów

Wskazówka OL W4.1

Podzielność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(1) = 0$ i $f'(1) = 0$. Otrzymujemy równanie, które zwija się do $(m-1)(n-2) = 2$.

Wskazówka OL W4.2

Jeżeli $Q(x)$ ma pierwiastek wielokrotny a, to $Q(a) = 0$ i $Q'(a) = 0$, więc $Q(a) - Q'(a) = \frac{a^n}{n!} = 0$.

Wskazówka OL W4.3

Z lematu o minimum wielomianu $P'(1) = 0$.

Stąd $0 = (n+1)P(1) - P'(1)$, a to jest teza.

Wskazówka OL W4.4

Po pierwsze $m = n - 1$.

Zauważmy, że $P(x)$ i $Q(x)$ nie mają wspólnych dzielników tj. nie istnieje wielomian $A(x)$ inny niż ± 1 taki, że $A(x)|P(x)$ i $A(x)|Q(x)$.

Zaiste dowolny wielomian $A(x)$ dzielący $P(x)$ i $Q(x)$ dzieli także $P(x)^2 - (x^2-1)Q^2(x) = 1$, więc musi być równy ± 1.

Bierzemy pochodną obu stron równania:

$$2P(x)P'(x) = Q(x) \cdot (pewienwielomian)$$

Skoro $P(x)$ i $Q(x)$ nie mają wspólnych dzielników, to $Q(x)|2P'(x)$, z porównania stopni $P'(x) = rQ(x)$, gdzie r jest liczbą rzeczywistą.

Z drugiej strony współczynnik przy najwyższym stopniu $P'(x)$ wynosi n, więc $P'(x) = nQ(x)$.

Wskazówka OL W4.5

Rozważmy wielomian $x^{n-1} - 1 = (x-1)Q(x)$. Chcemy $n-1|Q(n)$.

Liczymy pochodną: $(n-1)x^{n-2} = (x-1)Q'(x) - Q(x)$. Podstawiając $x = n$ otrzymujemy $n-1|Q(n)$.

Wskazówka OL W4.6

Najprościej skorzystać z poprzedniego zadania: $n^n \equiv n \mod (n-1)^2$, więc $n^n - n^2 + n - 1 \equiv -n^2 + 2n - 1 = -(n-1)^2 \equiv 0 \mod (n-1)^2$.

Wskazówka OL W4.7

Do rozważenia są dwa przypadki: $x_i = x_{i+1}$ oraz $x_i \neq x_{i+1}$. W pierwszym przypadku zastosuj lemat o pierwiastkach wielokrotnych, a w drugim uzasadnij, że wielomian W musi mieć minimum lub maksimum (w sensie lematu o maksimum) na przedziale (x_i, x_{i+1}).

Bibliografia

[1] Czasopismo “Delta”: http://www.mimuw.edu.pl/delta/,

[2] Koło matematyczne II LO w Gorzowie http://www.2lo.gorzow.pl/instytuty/kolko_mat/,

[3] Koło matematyczne V LO w Krakowie,

[4] Koło matematyczne XIV LO im. Staszica w Warszawie http://wm.staszic.waw.pl/,

[5] Obóz matematyczny OM w Zwardoniu http://www.om.edu.pl/,

[6] Olimpiady Matematyczne: Australii, Bułgarii, Hiszpanii, Kostaryki, Polski, Wielkiej Brytanii, ZSRR,

[7] Olsztyńskie warsztaty matematyczne,

[8] Pawłowski H., „Kółko matematyczne dla olimpijczyków”,

[9] Portal Mathlinks http://www.mathlinks.ro/,

[10] Prasolov V. V. „Plane Geometry”,

[11] Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne http://warsztatywww.wikidot.com/.