Okręgi i potęga punktu

Teoria

1. *Kąt środkowy* w okręgu to kąt, którego wierzchołkiem jest środek danego okręgu.

2. *Kąt wpisany* w okrąg to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona zawierają cięciwy. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

3. **Twierdzenie 1.1** *Jeżeli kąt środkowy i wpisany oparte są na tym samym łuku, to kąt środkowy ma miarę dwukrotnie większą, niż kąt wpisany.*

4. **Twierdzenie 1.2** *Kąt pomiędzy cięciwą i styczną przechodzącą przez koniec tej cięciwy równy jest połowie kąta środkowego opartego na tej cięciwie.*

5. **Definicja 1.3** *Niech będzie dany okrąg o o środku w O i promieniu r oraz punkt A. Niech prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okrąg o w punktach B i C. Wtedy potęgą punktu A względem okręgu o nazywamy iloczyn $|AB| \cdot |AC|$, jeżeli punkt A leży na zewnątrz okręgu i $-|AB| \cdot |AC|$, jeżeli leży on wewnątrz. Iloczyn ten jest niezależny od wyboru prostej k. Potęga punktu A jest też równa*

$$|AO|^2 - r^2$$

Zadania

1. Trapez $ABCD$, w którym $AB||CD$ oraz $\angle BCA = 90^\circ$ wpisano w okrąg o promieniu r. Punkt S jest środkiem podstawy AB. Udowodnić, że $|SD| = r$.

2. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu do boków AB, BC, CA odpowiednio. Wiedząc, że $\angle KML = 40^\circ$ i $\angle MKL = 60^\circ$, wyznacz kąty w trójkącie ABC.

3. Trapez $ABCD$, w którym $AB||CD$ oraz $\angle ABC = \alpha$, wpisano w okrąg o środku w S. Wiedząc, że $\angle BAS = \beta$, znajdź $\angle DSC$.

4. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy podstawie ma miarę 75°. Udowodnij, że podstawa trójkąta ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na ABC.

5. Używając oznaczeń z punktu piątego teorii, udowodnij, dla punktu A leżącego na zewnątrz o, że iloczyn $|AB| \cdot |AC|$ jest niezależny od wyboru prostej.

6. Wykaż, że jeżeli odcinki AB i CD przecinają się w E i zachodzi $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

7. Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $|MB| \cdot |ME| = |MC| \cdot |MF|$. Udowodnij, że zachodzi $|AE| \cdot |AC| = |AF| \cdot |AB|$.