



# Warunki w nierównościach

---

1. Liczby dodatnie  $a, b$  spełniają  $a + b = 1$ . Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \text{ oraz } \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$$

2. Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Udowodnić, że

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

3. Udowodnić, że jeżeli  $a, b, c$  są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

4. Niech  $a, b, c$  będą dodatnie i  $abc = 1$ . Udowodnij, że

$$ab + bc + ca \geq 3$$

5. Liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są dodatnie i takie, że  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Udowodnij, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$$

6. \* Niech  $a, b$  będą liczbami dodatnimi, takimi, że  $a + b = 1$ . Udowodnić, że

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$