PROSERWY - mecz matematyczny

1. Liczby dodatnie a, b, c spełniają $abc = 1$. Udowodnij, że
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2} \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

3. W kąt o wierzchołku X wpisano okręgi o_1, o_2. Okrąg s jest styczny zewnętrznie do o_1 w A i do o_2 w B. Udowodnić, że punkty A, B, X są współliniowe. Czy założenie, że s jest styczny *zewnętrznie* jest potrzebne?

4. Okrąg o środku w O został podzielony przez $n > 2$ średnic na $2n$ przystających fragmentów. Pokazać, że rzuty dowolnego punktu $M \neq O$ należącego do wnętrza okręgu na te średnice są wierzchołkami n kąta foremnego.

5. Każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są jednego koloru.

6. 2009 uczestników obozu naukowego stoi w serwerowni. Odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Każdy z nich ma jedną piłkę. Jednocześnie rzucają oni piłki, każdy najbliżej stojącemu uczestnikowi. Udowodnić, że żaden uczestnik nie dostanie więcej niż 5 piłek.

7. Mamy daną tablicę $n \times n$, której każde pole jest pokolorowane. Wiadomo, że żadne dwa rzędy nie są pokolorowane jednakowo. Udowodnić, że można wykreślić pewną kolumnę tak, że nadal żadne dwa rzędy nie będą pokolorowane jednakowo.

8. Niech M będzie liczbą całkowitą parzystą, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{M-1}$ będą liczbami całkowitymi dającymi parami różne reszty z dzielenia przez M, a $c_i = a_i + i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. Udowodnij, że istnieją takie $i \neq j$ całkowite, że $c_i \equiv c_j \mod M$.

9. Wielomian $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ jest taki, że $a_i \in \{-1, 1\}$. Udowodnić, że nie ma on pierwiatków zawartych w $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

10. Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Niech
$$\frac{k}{l} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$
gdzie k, l są całkowite. Udowodnić, że $p|k$.