



Równania funkcyjne

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x + y) = f(x^2) + f(y^2)$$

2. Funkcja f , określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0, przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1. Ponadto

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

dla dowolnych $x, y \neq 0$, oraz

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

dla każdego $x \notin \{0, 1\}$. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f .

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające równanie

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ różnowartościowe oraz spełniające równanie

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$$

8. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x + y) - f(x - y) = 4xy$$

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$(x - y)f(x + y) + (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ zależność

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$