PROSERWY - dzień trzeci

1. Niech $ABCD$ będzie prostokątem, a punkt P będzie dowolny (leżący w płaszczyźnie $ABCD$). Udowodnić, że
$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$$

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmuje stale wartości nieujemne. Ponadto zachodzi
$$f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$
dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
Udowodnić, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

3. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

PROSERWY - dzień trzeci

1. Niech $ABCD$ będzie prostokątem, a punkt P będzie dowolny (leżący w płaszczyźnie $ABCD$). Udowodnić, że
$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$$

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmuje stale wartości nieujemne. Ponadto zachodzi
$$f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$
dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
Udowodnić, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

3. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.