I Liceum Ogólnokształcące w Białymstoku
Podlaskie Stowarzyszenie na Rzecz Uzdolnionych

Obóz Naukowy PROSERWY 2009

Zadania matematyczne

Kadra obozu:
Aleksandra Baranowska
Iwona Bujnowska
Joachim Jelisiejew
Karol Kowalski

Hymn:
Kiedy Ci puszczają nerwy
na PROSERWY, na PROSERWY!
Nie smakują Ci konserwy?
Na PROSERWY, na PROSERWY!
Tu zadania rób bez przerwy!
Na PROSERWY, na PROSERWY!

Serwy, 20 – 26 września 2009

Spis treści

1 Wstęp

W dniach 20 – 26 września 2009 roku odbył się obóz matematyczno-informatyczny I Liceum Ogólnokształcącego w Białystoku im. Adama Mickiewicza. Poniżej prezentujemy zadania oraz wykłady z tego obozu. Zadania są w większości wzięte z ogólnodostępnych źródeł, wymienionych na końcu. Wykłady, z jednym zaznaczonym wyjątkiem, są autorstwa osób będących w kadrze obozu.

2 Zawody indywidualne

2.1 Grupa początkująca

1. O podłogę i prostopadłą do niej ścianę stoi oparta drabina. Nóżki drabiny przesuwają się po podłodze (bez poślizgu) prostopadle do ściany i drabina obsuwa się. Na środku drabiny siedzi kotek (którego traktujemy jako punkt). Udowodnić, że w miarę opadania drabiny kotek zakreśli w przestrzeni łuk okręgu.

2. Udowodnij, że jeżeli liczba całkowita dodatnia n ma nieparzystą ilość dzielników (całkowitych dodatnich), to jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

3. W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Udowodnij, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

4. Udowodnić, że trójkąt jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta.

5. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej n. Obliczyć $S(S(S(2006^{2009})))$.

6. 2009 uczestników obozu naukowego stoi w serwerowni. Odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Każdy z nich ma jedną piłkę. Jednocześnie rzucają oni piłki, każdy najbliżej stojącemu uczestnikowi. Udowodnić, że pewien uczestnik nie dostanie piłki.

7. Niech $ABCD$ będzie prostokątem, a punkt P będzie dowolny (leżący w płaszczyźnie $ABCD$). Udowodnić, że
$$AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$$

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmuje stale wartości nieujemne. Ponadto zachodzi
$$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$
dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.
Udowodnić, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

9. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześcianów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

10. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, takie, że również liczby $p + 2$ i $p^2 + 2p + 4$ są pierwsze.

11. Na płaszczyźnie ustalono dowolnie punkt A i okrąg o. Następnie wybrano punkt B leżący na okręgu o i punkt C taki, że BC jest średnicą o. Udowodnić, że liczba $|AB|^2 + |AC|^2$ nie zależy od wyboru punktu B.

12. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem, Q będzie środkiem odcinka AD, zaś F będzie rzutem B na CQ. Udowodnić, że
$$|AB| = |AF|$$

13. Karol i Ola, znudzeni wykładami Yogiego, poszli do sadu. Zebrali n czerwonych i m zielonych jabłek. Oczywiście czerwonych było więcej, gdyż każdy wie, że są lepsze. Pani Bujnowska piecze z nich ciasto takie, że :* jedno jabłko starcza tylko na jeden kawałek. Karol jest wielkim łakomczuchem, jednak nie lubi zielonych jabłek. Chce więc zjeść tyle kawałków, żeby mieć pewność, że co najmniej połowa z nich będzie zrobiona z czerwonych jabłek, ale nie chce się przejeść (zje minimalną liczbę kawałków spełniającą jego wymagania). Ile kawałków ciasta zostanie dla Oli?
* Jeden kawałek zawiera dokładnie 1 całe jabłko, albo zielone albo czerwone.

14. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy podstawie ma miarę 75°. Udowodnij, że podstawa trójkąta ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na ABC.

15. Liczby dodatnie a, b, c spełniają $a + b + c = 1$. Udowodnij, że
$$ab + bc + ca \geq 9abc$$

2.2 Grupa olimpijska

1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają $abcd = 1$. Udowodnić, że
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje czworościan, którego wszystkie ściany są przystające, ale nie jest on foremny.

3. Udowodnij, że:
   (a) Istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że wśród liczb $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+2009\}$ nie ma liczby pierwszej,
   (b) Istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że wśród liczb $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+2009\}$ jest dokładnie 10 liczb pierwszych.

4. Dane są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że $a_i \in \{1, -1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Ponadto wiemy, że
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$
Udowodnić, że n jest podzielne przez 4.

5. Niech O_1, O_2 będą okręgami przecinającymi się w dwóch różnych puntkach M, N. Niech styczne do okręgów O_1, O_2 w M przecinają O_2 w B, O_1 w A odpowiednio. Niech AN przecina O_2 w C, zaś BN przecina O_1 w D. Udowodnić, że
$$|AC| = |BD|$$

6. Danych mamy ciąg 101 liczb rzeczywistych. Udowodnić, że można z niego wyjąć 11-wyrazowy podciąg niemalejący, lub 11-wyrazowy podciąg nierosnący.

Zadania z czwartku

7. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$, o podstawach AB i CD, dla których
$$|AC| = 1, \quad |BD| = \sqrt{3} \text{ oraz } \angle ABD = 30^\circ$$
Wyznacz najmniejszą możliwą sumę długości podstaw tego trapezu.

8. Wyznaczyć największy możliwy iloczyn liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 2009.

9. Baran i Kaczor grają w następującą grę. Na początku na tablicy napisana jest liczba całkowita dodatnia n. W jednym ruchu gracz odejmuje od w napisanej w danym momencie na tablicy liczby jej dzielnik będący jedynką, liczbą pierwszą, lub iloczynem dwóch (niekoniecznie różnych) liczb pierwszych i wynikiem odejmowania zastępuje wcześniejszą liczbę. Pierwszy ruch wykonuje Baran, a następnie gracze wykonują ruchy na przemian. Wygrywa gracz, który napisze na tablicy liczbę 0. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb n Baran może zapewnić sobie wygraną, niezależnie od ruchów Kozła.

2.3 Zadania trudniejsze dla początkujących (fregaty)

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że
$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

2. Trójkąt $\triangle ABC$ jest wpisany w okrąg o. Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, a D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta $\angle BAC$ z o innym niż A. Udowodnić, że D jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle BCI$.

3. Ile jest różnych tablic $m \times n$ wypełnionych liczbami ze zbioru $\{1, -1\}$ w taki sposób, że iloczyn liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu wynosi -1?

4. W trójkąt ABC wpisano okrąg, tak, że jest on styczny do boku AB w punkcie D. Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają punkt wspólny.

2.4 Zadania trudniejsze dla olimpijczyków (pancerniki)

1. Na obozie naukowym w Serwach uczestnicy rozwiązywać będą 2008 zadań. Na obóz ten kompletowana jest kadra. Powiemy, że osoba A jest *niegłupsza* od osoby B, jeżeli A potrafi rozwiązać wszystkie te zadania, które potrafi rozwiązać B. Powiemy, że osoba C jest w kadrze *zbędna*, jeżeli istnieje w kadrze inna osoba, która jest niegłupsza od C. Z ilu maksymalnie osób może składać się kadra, jeżeli wiadomo, że nie zawiera ona zbędnych osób?

2. Pokazać, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to zachodzi:

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x} + \frac{\sqrt{x+z}}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{z} \geq \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{x+y+z}}$$

3. Okrąg o środku w I jest wpisany w trójkąt $\triangle ABC$ i jest styczny do AB, BC, CA w L, N, K odpowiednio. Punkt M jest środkiem odcinka AC, zaś punkt D leży na przecięciu KI i LN. Udowodnić, że punkty B, D, M są współliniowe.

4. Wykazać, że jeżeli $a > 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, to dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba

$$a^{2^n} - 1$$

ma co przynajmniej $n+1$ różnych dzielników pierwszych.

3 Mecz matematyczny

1. Liczby dodatnie a, b, c spełniają $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

3. W kąt o wierzchołku X wpisano okręgi o_1, o_2. Okrąg s jest styczny zewnętrznie do o_1 w A i do o_2 w B. Udowodnić, że punkty A, B, X są współliniowe.

4. Okrąg o środku w O został podzielony przez $n > 2$ średnic na $2n$ przystających fragmentów. Pokazać, że rzuty dowolnego punktu $M \neq O$ należącego do wnętrza okręgu na te średnice są wierzchołkami n kąta foremnego.

5. Każdy punkt płaszczyzny jest pokolorowany jednym z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wierzchołki są jednego koloru.

6. 2009 uczestników obozu naukowego stoi w serwerowni. Odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Każdy z nich ma jedną piłkę. Jednocześnie rzucają oni piłki, każdy najbliżej stojącemu uczestnikowi. Udowodnić, że żaden uczestnik nie dostanie więcej niż 5 piłek.

7. Mamy daną tablicę $n \times n$, której każde pole jest pokolorowane. Wiadomo, że żadne dwa rzędy nie są pokolorowane jednakowo. Udowodnić, że można wykreślić pewną kolumnę tak, że nadal żadne dwa rzędy nie będą pokolorowane jednakowo.

8. Niech M będzie liczbą całkowitą parzystą, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{M-1}$ będą liczbami całkowitymi dającymi parami różne reszty z dzielenia przez M, a $c_i = a_i + i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. Udowodnij, że istnieją takie $i \neq j$ całkowite, że $c_i \equiv c_j \mod M$.

9. Wielomian $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ jest taki, że $a_i \in \{-1, 1\}$. Udowodnić, że nie ma on pierwiatków zawartych w $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

10. Niech p będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Niech

$$\frac{k}{l} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

gdzie k, l są całkowite. Udowodnić, że $p|k$.

4 Wykłady

4.1 Okręgi i potęga punktu

Teoria

1. *Kąt środkowy* w okręgu to kąt, którego wierzchołkiem jest środek danego okręgu.

2. *Kąt wpisany* w okrąg to kąt, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona zawierają cięciwy. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

3. **Twierdzenie 4.1** *Jeżeli kąt środkowy i wpisany oparte są na tym samym łuku, to kąt środkowy ma miarę dwukrotnie większą, niż kąt wpisany.*

4. **Twierdzenie 4.2** *Kąt pomiędzy cięciwą i styczną przechodzącą przez koniec tej cięciwy równy jest połowie kąta środkowego opartego na tej cięciwie.*

5. **Definicja 4.3** *Niech będzie dany okrąg o o środku w O i promieniu r oraz punkt A. Niech prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okrąg o w punktach B i C. Wtedy potęgą punktu A względem okręgu o nazywamy iloczyn $|AB| \cdot |AC|$, jeżeli punkt A leży na zewnątrz okręgu i $-|AB| \cdot |AC|$, jeżeli leży on wewnątrz. Iloczyn ten jest niezależny od wyboru prostej k. Potęga punktu A jest też równa*

$$|AO|^2 - r^2$$

Zadania

1. Trapez $ABCD$, w którym $AB||CD$ oraz $\angle BCA = 90°$ wpisano w okrąg o promieniu r. Punkt S jest środkiem podstawy AB. Udowodnić, że $|SD| = r$.

2. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu. Punkty K, L, M są punktami styczności okręgu do boków AB, BC, CA odpowiednio. Wiedząc, że $\angle KML = 40°$ i $\angle MKL = 60°$, wyznacz kąty w trójkącie ABC.

3. Trapez $ABCD$, w którym $AB||CD$ oraz $\angle ABC = \alpha$, wpisano w okrąg o środku w S. Wiedząc, że $\angle BAS = \beta$, znajdź $\angle DSC$.

4. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC|$, kąt przy podstawie ma miarę $75°$. Udowodnij, że podstawa trójkąta ma długość równą długości promienia okręgu opisanego na ABC.

5. Używając oznaczeń z punktu piątego teorii, udowodnij, dla punktu A leżącego na zewnątrz o, że iloczyn $|AB| \cdot |AC|$ jest niezależny od wyboru prostej.

6. Wykaż, że jeżeli odcinki AB i CD przecinają się w E i zachodzi $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

7. Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $|MB| \cdot |ME| = |MC| \cdot |MF|$. Udowodnij, że zachodzi $|AE| \cdot |AC| = |AF| \cdot |AB|$.

4.2 Warunki w nierównościach

1. Liczby dodatnie a, b spełniają $a + b = 1$. Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \text{ oraz } \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$$

2. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Udowodnić, że

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

3. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

4. Niech a, b, c będą dodatnie i $abc = 1$. Udowodnij, że

$$ab + bc + ca \geq 3$$

5. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie i takie, że $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Udowodnij, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n$$

6. * Niech a, b będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a + b = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

4.3 Zasada szulfadkowa Dirichleta

Teoria

Twierdzenie 4.4 *Zasada szufladkowa Dirichleta Jeżeli $n + 1$ przedmiotów wkładamy do n szufladek, to w przynajmniej jednej szufladce będą przynajmniej 2 przedmioty.*

Zadania

1. Mamy 25 jabłek, każde w jednym z 4 gatunków. Udowodnić, że można wybrać z nich 7 jabłek jednego gatunku.

2. Udowodnić, że wśród 50 osób pewne 8 urodziło się w tym samym dniu tygodnia.

3. Zakładając, że człowiek może mieć na głowie maksymalnie 150 tysięcy włosów wykazać, że w Białystoku (294 tysiące mieszkańców) pewne 2 osoby mają tyle samo włosów na głowie.

4. W pokoju znajduje się 6 osób. Pewne osoby znają się ze sobą. Wykazać, że wśród tych sześciu osób są dwie o tej samej liczbie znajomych.

5. Wykazac, że w zbiorze $n + 1$ liczb całkowitych istnieją dwie, których różnica jest podzielna przez n.

6. Przy okrągłym stole ma usiąść 2009 ambasadorów. Na stole poustawiano proporczyki z nazwiskami, a następnie posadzono przy stole ambasadorów, ale tak, że żaden nie siedział na swoim miejscu. Udowodnić, że można tak obrócić stół, żeby przynajmniej 2 ambasadorów siedziało na swoich miejscach.

7. Wykazać, że wśród naturalnych potęg 7 istnieje taka, której zapis dziesiętny kończy się na 01.

4.4 Klasyfikacja trójek pitagorejskich

Lemat 4.5 *Jeżeli liczby całkowite a, b, c spełniają*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

to co najmniej jedna z liczb a, b jest parzysta.

Dowód:

Lemat 4.6 *Jeżeli liczby a, b, w, n są całkowite dodatnie, $NWD(a, b) = 1$ oraz*

$$ab = w^n$$

to a, b są n-tymi potęgami liczb całkowitych, innymi słowy istnieją takie t, u całkowite dodatnie, że

$$a = t^n, \ b = u^n$$

Dowód:

Twierdzenie 4.7 *Liczby całkowite dodatnie a, b, c względnie pierwsze spełniają równanie*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $m > n$ całkowite dodatnie, że

$$a = m^2 - n^2, \ b = 2mn, \ c = m^2 + n^2$$

lub

$$a = 2mn, \ b = m^2 - n^2, \ c = m^2 + n^2$$

1. $\Leftarrow$ Po pierwsze, jeżeli m, n z treści zadania istnieją to a, b, c są całkowite dodatnie i zachodzi

   $$a^2+b^2 = (m^2-n^2)^2+(2mn)^2 = m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2 = m^4+2m^2n^2+n^4 = (m^2+n^2)^2 = c^2$$

   To kończy dowód implikacji w lewo .

2. $\Rightarrow$. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ spełniają $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Liczby a, b, c są względnie pierwsze , a więc dowolne 2 z liczb a, b, c są również względnie pierwsze. Faktycznie, załóżmy $NWD(a, b) > 1$. Istnieje wtedy liczba pierwsza p, taka, że

   $$p | NWD(a, b)$$

   czyli $p|a$ i $p|b$, a więc $p|a^2+b^2 = c^2$, a skoro p jest pierwsza, to $p|c$ i $p|NWD(a, b, c) = 1$. Sprzeczność.

4. Skoro a, b są względnie pierwsze, to przynajmniej jedna z nich jest nieparzysta. Z lematu wynika natomiast, że jedna z liczb a, b musi być parzysta. Załóżmy, że $2 \not| a$.
   Zauważmy, że $2 \not| a$ i $2|b$, więc $2 \not| c$, czyli

   $$2|c - a \text{ i } 2|c + a$$

   Istnieją więc k, l całkowite $c - a = 2k$, $c + a = 2l$.
   Jest

   $$b^2 = (c - a)(c + a) = 4kl$$

   Skoro $2|b$ to możemy podstawić $b = 2b'$, gdzie $b' \in \mathbb{Z}$:

   $$b'^2 = kl$$

   Mamy $NWD(k, l) = \frac{1}{2}NWD(c - a, c + a) = \frac{1}{2}NWD(c + a, 2a) = \frac{1}{2}2 = 1$.
   Z lematu wiemy więc, że dla pewnych n, m jest

   $$k = n^2 \text{ i } l = m^2$$

   Jest więc

   $$b^2 = 4kl = 4m^2n^2 \text{ stąd } b = 2mn$$
   $$2a = (c + a) - (c - a) = 2m^2 - 2n^2 \text{ stąd } a = m^2 - n^2$$
   $$2c = (c + a) + (c - a) = 2m^2 + 2n^2 \text{ stąd } c = m^2 + n^2$$

   Oczywiście $m > n$, gdyż $0 < a = m^2 - n^2$. Dowód $\Rightarrow$ jest więc zakończony.

5. Podany dowód klasyfikuje w zasadzie wszystkie trójki pitagorejskie, gdyż każda taka trójka powstaje przez pomnożenie trójki pitagorejskiej złożonej z liczb względnie pierwszych przez jakiś mnożnik.

6. Próba podsumowania - dlaczego właśnie tak dowodziliśmy?
Poniższe rozumowanie NIE ma nic wspólnego z dowodzeniem, jest to tylko spekulacja, którą przekuć można w dowód. *Jeżeli teza jest prawdziwa*, to z tezy możemy wyliczyć $2m^2 = a + c$ i $2n^2 = a - c$, pozostaje więc udowodnić, że ułamki $\frac{c+a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$ są całkowite i są kwadratami liczb całkowitych. Tak właśnie przebiega dowód.

4.5 Pewne techniki rozwiązywania nierówności

1. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{\sqrt{a^2bc} + \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + (a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3}$$

2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi

$$\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2+b^2} \geq \frac{5}{2}$$

3. * Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi, takimi, że $abc = 1$. Pokazać, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

4. Niech a, b będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a + b = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

5. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3} + \frac{b^4}{b^3+b^2c+c^3} + \frac{c^4}{c^3+c^2d+d^3} + \frac{d^4}{d^3+d^2a+a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}$$

6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność Nesbitta

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

8. Niech $n > 3$ będzie liczbą naturalną, a liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą dodatnie. Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq n$$

gdzie suma jest cykliczna, tj. $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_{n+3} = x_3$.

4.6 Równania funkcyjne

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$f(x+y) = f(x^2) + f(y^2)$$

2. Funkcja f, określona na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0, przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste różne od 1. Ponadto

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

dla dowolnych $x, y \neq 0$, oraz

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

dla każdego $x \notin \{0, 1\}$. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f.

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające równanie

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$.

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

7. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różnowartościowe oraz spełniające równanie

$$f(f(x) + y) = f(x+y) + 1$$

8. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy$$

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$(x-y)f(x+y) + (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}$ spełniające dla $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ zależność

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

4.7 Miejsca geometryczne

1. O podłogę i prostopadłą do niej ścianę stoi oparta drabina. Nóżki drabiny przesuwają się po podłodze (bez poślizgu) prostopadle do ściany i drabina obsuwa się. Na środku drabiny siedzi kotek (którego traktujemy jako punkt). Udowodnić, że w miarę opadania drabiny kotek zakreśli w przestrzeni łuk okręgu.

2. *Miejsce geometryczne* – w geometrii zbiór punktów spełniających zadany warunek, np. pewna kula może być zdefiniowana jako miejsce geometryczne punktów odległych nie bardziej niż o r od środka układu współrzędnych.

3. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B. Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny równoodległych od A, B jest prosta prostopadła do odcinka AB i przechodząca przez jego środek.

4. W przestrzeni dane są punkty A, B. Udowodnić, że miejscem geometrycznym punktów przestrzeni trójwymiarowej równoodległych od A, B jest płaszczyzna prostopadła do odcinka AB i przechodząca przez jego środek.

5. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Udowodnić, że zbiorem punktów równoodległych od prostych AC i BC jest para prostych prostopadłych, przecinających się w C. Jak jest w przypadku przestrzennym?

6. *Okrąg Apoloniusza* Na płaszczyźnie dane są różne punkty A, B oraz liczba dodatnia k. Udowodnić, że zbiór punktów X płaszczyzny, spełniających

   $$\frac{AX}{BX} = k$$

   jest

   - okręgiem, jeżeli $k \neq 1$,
   - symetralną AB, jeżeli $k = 1$.

7. Niech o będzie okręgiem Apoloniusza dla danych $A, B, k \neq 1$ przy czym punkt A leży na zewnątrz o. Z punktu A poprowadzono styczne AP, AQ do okręgu o. Udowodnić, że B jest środkiem odcinka PQ.

8. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od $180°$ oraz zachodzi równość

   $$AB \cdot CD = AD \cdot BC$$

   Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnić, że $\angle PCB = \angle ACD$.

9. * Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym AB i CD nie są równoległe. Niech $\mathcal{X}$ będzie zbiorem punktów X takich, że $[XAB] + [XCD] = \frac{1}{2}[ABCD]$, gdzie $[\mathcal{Y}]$ oznacza pole figury $\mathcal{Y}$. Znaleźć $\mathcal{X}$.

4.8 Metoda ekstremum

1. Materiały wzięte z `http://www.mimuw.edu.pl/~sem/konferencja-kmp2008/materialy/guzicki.pdf` (9 zadań)

4.9 Kurs trudnego udowadniania liniowości układów :)

1. Materiały na `http://21wdw.staszic.waw.pl/ktulu/`

Literatura

[1] Baltic Way 2007 http://www.balticway07.dk/

[2] Hojoo Lee „Topics In Inequalities" http://compactorange.googlepages.com/tin2006new.pdf

[3] International Mathematical Olympiad http://www.imo-official.org/

[4] Koło matematyczne Podlaskiego Oddziału PTM http://www.ptm.pb.bialystok.pl

[5] Koło matematyczne V LO w Krakowie

[6] Koło matematyczne XIV LO im. Staszica w Warszawie http://wm.staszic.waw.pl/

[7] Obóz matematyczny OM w Zwardoniu http://www.om.edu.pl/

[8] Olimpiada Matematyczna http://www.om.edu.pl/

[9] Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów http://www.omg.edu.pl/

[10] Mathematical Excalibur http://www.math.ust.hk/excalibur/

[11] Podlaski Konkurs Matematyczny http://www.ptm.pb.bialystok.pl

[12] Portal Mathlinks http://www.mathlinks.ro/

[13] V. V. Prasolov „Plane Geometry"

Sporządził Joachim Jelisiejew v1.1