



## 1.1 Pierwszaki

1. Punkt  $D$  należy do wnętrza trójkąta  $\triangle ABC$ . Udowodnić, że  $\sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB$ .
2. Dowieść, że jeśli  $a, b, c, x$  są liczbami dodatnimi takimi, że  $abc = 1$  to

$$(x+a)(x+b)(x+c) \geq (x+1)^3.$$

3. Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \dots + |a_n - a_{n-1}| + |a_1 - a_n|$$

jeżeli ciąg  $a_1, \dots, a_n$  jest permutacją ciągu  $1, 2, \dots, n$ ?

4. *Być może było u Seby.* Niech  $H$  będzie punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego  $\triangle ABC$ , a punkty  $D, E, F$  będą spodkami wysokości tego trójkąta. Wykazać, że  $H$  jest środkiem okręgu wpisanego w  $\triangle DEF$ .
5. Dane są liczby rzeczywiste  $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ . Wykazać, że

$$abc \geq a + b + c.$$

6. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste  $x, y, z$  spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

## 1.2 Ivl II

1. W okrąg wpisano równoboczny trójkąt  $ABC$ . Dowieść, że jeśli  $M$  jest dowolnym punktem tego okręgu, to jedno z odległości  $MA, MB, MC$  jest równa sumie pozostałych.
2. Niezerowy wielomian  $f(x)$  o współczynnikach rzeczywistych ma własność, że wielomian  $f(x^2 + x + 1)$  jest podzielny przez  $f(x)$  tzn. istnieje wielomian  $g(x)$  taki, że  $f(x)g(x) = f(x^2 + x + 1)$ . Udowodnić, że  $f(x)$  ma parzysty stopień.
3. Punkty  $A, B, C$  należą do okręgu  $o$ , punkt  $M$  jest środkiem tego łuku  $AB$ , który nie zawiera  $C$ , zaś  $N$  jest środkiem tego łuku  $BC$ , który nie zawiera  $A$ . Odcinki  $AB, BC$  przecinają  $MN$  w punktach  $P, Q$  odpowiednio. Udowodnić, że  $BP = BQ$ .
4. Liczby  $x_1, \dots, x_{2011} \in (0, 1]$  są takie, że jeśli podzielimy je na dwa zbiory to w którymś z nich suma liczb jest nie większa niż 1. Uzasadnić, że suma wszystkich liczb jest nie większa niż 3.  
★ Udowodnić, że stałą 3 nie da się poprawić.

*Zadania geometryczne pochodzą z książki "Geometria elementarna", zaś niektóre pozostałe zadania — z czasopisma "Delta"*