Do boju (na trudniejszym odcinku walk)

10 lutego 2009

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi

$$a^3b + ab^3 + 2a^3 + 2b^3 + 2 \geq 2a^2b + 2ab^2 + a^2 + b^2 + 2ab$$

Rozwiązanie: W tej nierówności skorzystamy ze średniej ważonej (choć tylko dla wag wymiernych). Spróbujmy poskładać z lewej strony prawą (nierówność nie ma jednego stopnia, więc większość nierówności się nie przyda).
Wyraz a^2 możemy złożyć tylko z tego, co nie ma b, z a^3 i 2. Ze średniej ważonej chcemy uzyskać a^2, ważąc $\alpha a^3 + (1-\alpha)$. Mamy $\alpha a^3 + (1-\alpha) \geq a^{3\alpha}$. Bierzemy więc $\alpha = \frac{2}{3}$ i uzyskujemy

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3} \geq a^2$$

$$\frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{3} \geq b^2$$

Druga nierówność wytworzona jest analogicnie do pierwszej. Idźmy dalej: chcemy teraz pozbyć się z lewej strony a^3b i ab^3 (bo a^3, b^3 są znacznie poręczniejsze), robiąc z nich (z lekkich dodatniem wody w postaci stałej 1), piękne danie a^2b. Mamy $\alpha a^3b + \beta ab^3 + (1-\alpha+\beta) \geq a^{3\alpha+\beta}b^{3\beta+\alpha}$. Chcemy $3\alpha+\beta = 2$, $3\alpha+\beta = 1$. Obliczamy $\alpha = \frac{5}{8}$, $\beta = \frac{1}{8}$, czyli:

$$\frac{5}{8}a^3b + \frac{1}{8}ab^3 + \frac{1}{4} \geq a^2b$$

$$\frac{5}{8}ab^3 + \frac{1}{8}a^3b + \frac{1}{4} \geq ab^2$$

Chcemy oczywiście, mając zamiłowanie do porządku, upiec tyle samo a^2b, co ab^2. Na jedną porcję idzie nam $\frac{6}{8}a^3b$ i $\frac{6}{8}ab^3$ oraz $\frac{1}{2}$. Upieczemy więc $\frac{4}{3}$ porcji:

$$\frac{4}{3}(\frac{5}{8}a^3b + \frac{1}{8}ab^3 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{6}a^3b + \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{3} \geq \frac{4}{3}a^2b$$

$$\frac{4}{3}(\frac{5}{8}ab^3 + \frac{1}{8}a^3b + \frac{1}{4}) = \frac{5}{6}ab^3 + \frac{1}{6}a^3b + \frac{1}{3} \geq \frac{4}{3}ab^2$$

Upichciliśmy już $a^2, b^2, \frac{4}{3}a^2b, \frac{4}{3}ab^2$. Zostało nam do zrobienia $\frac{2}{3}a^2b, \frac{2}{3}ab^2, 2ab$, a z produktów mamy $\frac{4}{3}a^3, \frac{4}{3}b^3, \frac{2}{3}$. Tutaj już nie potrzeba aż tak dużo talentu kulinarnego: Mamy $\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 \geq a^2b$, czyli

$$\frac{4}{9}a^3 + \frac{2}{9}b^3 \geq \frac{2}{3}a^2b$$

$$\frac{4}{9}b^3 + \frac{2}{9}a^3 \geq \frac{2}{3}ab^2$$

Zostało $(\frac{4}{3} - \frac{6}{9} = \frac{2}{3})a^3$, $\frac{2}{3}b^3$, $\frac{2}{3}$. Robimy z tego eintopf:

$$2(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}) \geq 2a^{3\frac{1}{3}}b^{3\frac{1}{3}} = 2ab$$

Koniec, można siadać do stołu.

2. Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n człopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s > n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r + s \leq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.
   Rozwiązanie: W rozwiązaniach tego testu dla grupy młodszej.

3. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb całkowitych dodatnich większych od 1 takich, że kwadrat każdej z nich pomniejszony o jeden jest podzielny przez każdą z pozostałych.
   Rozwiązanie: Nazwijmy 3 liczby z zadania przez a, b, c. Zauważmy, że a, b, c są parami względnie pierwsze (tj. każda para z tych liczb jest względnie pierwsza). Faktycznie, niech np. $d|a, b$. Wtedy, skoro $a|b^2 - 1$, to $d|b^2 - 1$ i $d|b^2$, czyli $d| - 1$, $d = 1$, dla pozostałych par analogicznie.
   Skoro liczby są względnie pierwsze, to np. $a|b^2 - 1$ i $c|b^2 - 1$ implikuje $ac|b^2 - 1$. Mamy więc:
   $$ab|c^2 - 1, ac|b^2 - 1, bc|a^2 - 1$$
   Niech, bez straty ogólności, bo podzielności są cykliczne, $c = \min(a, b, c)$. Mamy $ab|c^2 - 1$ i $ab, c^2 - 1 > 0$, więc $ab \leq c^2 - 1$. Ale $a \geq c$ i $b \geq c$, czyli $ab \geq c^2 > c^2 - 1$. Sprzecznosc dowodzi, że takich trójek liczb nie ma.

4. Odcinki AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, zaś H jest jego ortocentrum (punktem przecięcia wysokości). Prosta przechodząca przez E i środek odcinka CH przecina odcinek CD w punkcie T, zaś odcinki DF i BH przecinają się w S. Udowodnij, że $ST \perp AB$.
   Rozwiązanie: Nieco inne niż na kółku, dzięki uproszczeniom Endrju.
   Wystarczy, że pokażemy, że $ST||CF$. Zrobimy to używając tw. Talesa.
   Oznaczmy $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$. Pamietamy (por. młodsze zadania), że na $AEHF$, $CEHD$, $BFHD$ da się opisać okręgi, oraz, że CEH jest prostokątny.
   Obliczamy $\angle DFB = 90^\circ - \angle DFH = 90^\circ - \angle DBH = \gamma$, $\angle SBF = 90^\circ - \alpha$, $\angle CEM = \angle ECM = 90^\circ - \alpha$. Stąd, że cechy kąt-kąt-kąt:
   $$\triangle CET \simeq \triangle FBS$$
   Stąd wynika $\frac{CT}{CE} = \frac{FS}{BF}$. Dalej $\angle FDB = \angle FHB = \angle CHE = \angle CDE$, stąd
   $$\triangle CED \simeq \triangle FBD$$
   Stąd $\frac{CD}{CE} = \frac{FD}{BF}$. Dzieląc przez to stronami $\frac{CT}{CE} = \frac{FS}{BF}$ otrzymujemy $\frac{CT}{CD} = \frac{FS}{FD}$, czyli $1 - \frac{TD}{CD} = 1 - \frac{SD}{FD}$, a więc
   $$\frac{TD}{CD} = \frac{SD}{FD}$$
   To kończy dowód.