Do boju (na trudniejszym odcinku walk)

29 stycznia 2009

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi
$$a^3b + ab^3 + 2a^3 + 2b^3 + 2 \geq 2a^2b + 2ab^2 + a^2 + b^2 + 2ab$$

2. Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n czlopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s > n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r + s \leq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.

3. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb całkowitych dodatnich większych od 1 takich, że kwadrat każdej z nich pomniejszony o jeden jest podzielny przez każdą z pozostałych.

4. Odcinki AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, zaś H jest jego ortocentrum (puntem przecięcia wysokości). Prosta przechodząca przez E i środek odcinka CH przecina odcinek CD w punkcie T, zaś odcinki DF i BH przecinają się w S. Udowodnij, że $ST \perp AB$.