Do boju

10 lutego 2009

1. Wykazać, że jeśli $a+b+c=1$ oraz $a,b,c>0$ to
$$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{1}{27}$$
Rozwiązanie: Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową dla liczb a^2, b^2, c^2 mamy
$$\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$
,
$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$
Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratową dla liczb a, b, c jest
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}$$
Stąd i z założenia mamy
$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}$$
Po podniesieniu do 4. potęgi i pomnożeniu obu stron przez 3 dostajemy tezę.

2. Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n człopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r+s \leq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.
Rozwiązanie: Niech a_{ij} mówi, czy człopak i lubi dziewczynę j: $a_{ij}=1$ jeżeli lubi, a 0 inaczej. Analogicznie niech b_{ji} mówi, czy dziewczyna j lubi chłopaka i.
Liczb a_{ij} i b_{ji} jest po n^2. Wśród tych liczb jest $(r+s)n$ jedynek i reszta zer.
Jeżeli dla wszystkich par (i,j) byłoby uczucie nieodwzajemnione, to $a_{ij}=0 \vee b_{ji}=0$. Wtedy mielibyśmy najwyżej n^2 jedynek (bo w każdej z n^2 rozłącznych par liczb a_{ij}, b_{ji} jest najwyżej jedna 1), czyli $(r+s)n \leq n^2$, $r+s \leq n$. To zaś pokazuje (rozumujemy przez zaprzeczenie), że jeśli $r+s>n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem.
Musimy teraz znaleźć, dla dowolnych $n, r, s : r+s \leq n$, takie ustawienie lubień, że żadne uczucie nie jest odwzajemnione.
Jeżeli $r=0$ lub $s=0$, to łatwo da się je znaleźć. Załóżmy dalej, że $r,s>0$.
Niech chopcy i dziewczyny będą ponumerowani od 0 do $n-1$. Niech będzie tak, że chłopak i lubi dziewczyny $i, i+1 \mod n, i+2 \mod n, \cdots, i+s-1 \mod n$ (ew. żadnej, jeżeli $s=0$) i niech dziewczyna j lubi chłopców $j+1 \mod n, j+2 \mod n, \cdots, j+r \mod n$.
W tym ustawieniu każdy chłopak lubi s dziewczyn i każda dziewczyna lubi r chłopców. Ponadto każde lubienie jest nieodwzajemnione. Faktycznie załóżmy, że i, j są takie, że chłopak i lubi dziewczynę j. Stąd
$$j \in \{i, i+1 \mod n, i+2 \mod n, \cdots, i+s-1 \mod n\}$$
Niech $j = i+k \mod n$. Żeby dziewczyna j lubiła chłopaka i musi być $i \in \{j+1 \mod n, j+2 \mod n, \cdots, j+r-1 \mod n\}$, czyli $i \in \{i+k+1 \mod n, i+k+2 \mod n, \cdots, i+k+r-1 \mod n\}$,

czyli $0 \in \{k+1 \mod n, k+2 \mod n, \cdots, k+r-1 \mod n\}$. Ale $k \geq 0$ i $k+r \leq r+s-1 < n$. Stąd w ciągu $(k+1, k+2, \cdots, k+r-1)$ nie ma liczby podzielnej przez n, więc $0 \notin \{k+1 \mod n, k+2 \mod n, \cdots, k+r-1 \mod n\}$. Sprzeczność dowodzi, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.

3. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb naturalnych (a_n), że dla dowolnej liczby naturalnej k w ciągu $a_1 + k, a_2 + k, \cdots$ jest skończenie wiele liczb pierwszych.
   Rozwiązanie: To zadanie byłoby zbyt trudne gdyby nie istniał, bo jak udowodnić, że coś jest pierwsze, więc istnieje.
   Najprostszym sposobem na zapewnienie, że $a_i + k$ nie jest pierwsze, jest $k|a_i$. Zgodnie z tą ideą bierzemy $a_i = i!$. W ten sposób dla $k > 1$ na pewno wyrazy $a_k + k = k! + k, a_{k+1} = (k+1)! + k, \cdots$ będą podzielne przez k, więc wszystko gra. Zostaje przypadek $k = 1$.
   Zauważmy, że jeżeli weźmiemy $a_k = k!q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, to nic się wyżej nie psuje. Chcemy tak dobrać q, że $a_k + 1 = k! + 1$ nie jest pierwsze. Można to zrobić np. biorąc $a_k = (k!)^3$. Wtedy $a_k + 1 = (k!)^3 + 1^3 = (k! + 1)((k!)^2 - k! + 1)$, co na pewno jest pierwsze, jeżeli tylko $(k!)^2 - k! + 1 > 1$, co zachodzi dla $k > 1$.

4. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, AD, BE, CF jego wysokościami, a H punktem przecięcia tych wysokości. Udowodnij, że $\angle EFH = \angle DFH$ (z czego wynika, że H jest środkiem okręgu wpisanego w DEF).
   Rozwiązanie: Zauważmy, że na czworokącie $AEHF$ da się opisać okrąg. Faktycznie $\angle AEH = 90°$ i $\angle AFH = 90°$, więc $\angle AEH + \angle AFH = 180°$, co już gwarantuje, że okrąg da się opisać. Analogicznie okrąg da się opisać na $BFHD$.
   Z równości kątów wpisanych w okrąg i opartych na tym samym łuku mamy
   $$\angle EFH = \angle EAH, \angle DFH = \angle DBH$$
   Ponadto mamy $\angle EAH = \angle CAD = 90° - \angle ACB$ (bo $\angle ADC = 90°$). Analogicznie $\angle DBH = 90° - \angle ACB$, co już dowodzi równości kątów $\angle EFH$ i $\angle DFH$.