Do boju

28 stycznia 2009

1. Wykazać, że jeśli $a + b + c = 1$ oraz $a, b, c > 0$ to
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{1}{27}$$
2. Na przyjęciu w krainie Baranów, Dymówek, Kaczek, Koników i Małp jest n dziewcząt i n czlopców. Każda dziewczyna lubi r chłopców, a każdy chłopiec lubi s dziewcząt. Udowodnić, że jeżeli $r+s > n$, to istnieje para, która lubi się nawzajem, a jeżeli $r + s \leq n$ to może być tak, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.
3. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb naturalnych (a_n), że dla dowolnej liczby naturalnej k w ciągu $a_1 + k, a_2 + k, \cdots$ jest skończenie wiele liczb pierwszych.
4. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, AD, BE, CF jego wysokościami, a H punktem przecięcia tych wysokości. Udowodnij, że $\angle EFH = \angle DFH$ (z czego wynika, że H jest środkiem okręgu wpisanego w DEF).