To już koniec...

Ostatnia seria przygotowawcza

1. Niech $n, m \in \mathbb{Z}_+$ będą takie, że $NWW(m,n) + NWD(m,n) = m + n$. Udowodnij, że jedna z tych liczb dzieli drugą.
   Rozwiązanie: Niech $n \geq m$ (wszystko jest symetryczne, więc można to założyć). Jest $NWW(m,n) = n \cdot q$. Jeżeli $q \geq 2$, to $NWW(m,n) \geq 2n \geq n+m$, więc $NWW(m,n)+NWD(m,n) > m+n$. Stąd $q = 1$, co dowodzi, że $NWW(n,m) = n$, a więc $m|n$.

2. Dane są 2 rozłączne zbiory $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$, których sumą jest $\mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a, b większe od n, że $\{a, b, a+b\}$ jest zawarte w $\mathbb{A}$ lub zawarte w $\mathbb{B}$. (Wskazówka: Najpierw znajdź jakiekolwiek takie liczby :)
   Rozwiązanie: Znajdźmy najpierw jakiekolwiek liczby spełniające.
   Załóżmy, że $1 \in \mathbb{A}$. Gdyby $2 \in \mathbb{A}$, to $\{1,1,2\} \subset \mathbb{A}$, więc znaleźliśmy. Załóżmy $2 \in \mathbb{B}$. Gdyby $4 \in \mathbb{B}$, to $\{2,2,4\} \subset \mathbb{B}$, więc też znaleźliśmy. Załóżmy $4 \in \mathbb{A}$. $1, 4 \in \mathbb{A}$, stąd gdyby $5 \in \mathbb{A}$, to $\{1,4,5\} \subset \mathbb{A}$, stąd $5 \in \mathbb{B}$.
   Gdyby $3 \in \mathbb{A}$, to $\{1,3,4\} \subset \mathbb{A}$.
   Gdyby $3 \in \mathbb{B}$, to $\{2,3,5\} \subset \mathbb{B}$.
   Z powyższego wynika, że zawsze znajdziemy taką trójkę liczb.
   Rozważmy zbiór liczb $\{n+1, 2(n+1), 3(n+1), \cdots\}$. Całe poprzednie rozumowanie przenosi się na ten zbiór, więc znajdziemy w nim liczby a, b takie, że $\{a, b, a+b\}$ zawarte jest w którymś z $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. Oczywiście te liczby będą większe od n, bo wszystkie liczby z tego zbioru są większe od n.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}$$

   Rozwiązanie: Mamy $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3}$, stąd po przekształceniach dostajemy $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, a więc

$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

   Można to również udowodnić za pomocą ciągów jedno-monotonicznych.
   Stąd

$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq 1 + \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

   Niech $x = \frac{3}{a+b+c}$. Mamy do udowodnienia nierówność

$$1 + \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq \frac{6}{a+b+c}$$

   czyli $1 + x^2 \geq 2x$. Jest ona równoważna $(x-1)^2 \geq 0$.

4. (*?) Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 90°$. Niech M będzie środkiem przeciwprostokątnej AB, H spodkiem (punktem przecięcia z AB) wysokości poprowadzonej z C, a P punktem wewnątrz trójkąta, takim, że $|AP| = |AC|$. Udowodnić, że PM jest dwusieczną (wewnętrzną) kąta $\angle BPH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle BAC = 60°$.