To już koniec...

Ostatnia seria przygotowawcza

1. Niech $n, m \in \mathbb{Z}_+$ będą takie, że $NWW(m,n) + NWD(m,n) = m + n$. Udowodnij, że jedna z tych liczb dzieli drugą.

2. Dane są 2 rozłączne zbiory $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$, których sumą jest $\mathbb{Z}_+$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a, b większe od n, że $\{a, b, a+b\}$ jest zawarte w $\mathbb{A}$ lub zawarte w $\mathbb{B}$. (Wskazówka: Najpierw znajdź jakiekolwiek takie liczby :)

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi
$$1 + \frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c}$$
.

4. (*?) Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 90°$. Niech M będzie środkiem przeciwprostokątnej AB, H spodkiem (punktem przecięcia z AB) wysokości poprowadzonej z C, a P punktem wewnątrz trójkąta, takim, że $|AP| = |AC|$. Udowodnić, że PM jest dwusieczną (wewnętrzną) kąta $\angle BPH$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle BAC = 60°$.