Przygotowanie do OMa 3.

1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC mają punkt wspólny. Udowodnić, że w $ABCD$ można wpisać okrąg.
   Rozwiązanie:
   W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy
   $$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$
   Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w ABC do AB, BC, CA jako E, F, X odpowiednio. Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w ADC do CD, AD, DC jako G, H, Y odpowiednio. Wtedy $|AB| = |AE| + |BF|$, $|BC| = |BF| + |CF|$, $|CD| = |CG| + |GD|$, $|AD| = |DH| + |HA|$. Ponadto z równości stycznych jest $|AE| = |AX|$, $|BE| = |BF|$, $|CF| = |CX|$, $|CG| = |CY|$, $|DG| = |DH|$, $|AH| = |AY|$. Mamy więc:
   $$|AB| + |CD| = |AD| + |BC| \Leftrightarrow |AX| + |CY| = |AY| + |CX| \Leftrightarrow 2|AB| = 2|AY| + 2|CX|$$
   Mamy $|AY| + |CX| = |AB| \Leftrightarrow X = Y$, co kończy ten nudny dowód.

2. Udowodnić, że jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, $m, n \in \mathbb{Z}_+$ i $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$, to $p|m$.
   Rozwiązanie:
   Zauważmy, że wystarczy rozważać sytuację, gdy $\frac{m}{n}$ jest zredukowany, czyli gdy $NWD(m, n)$ - wszystkie inne możliwe do otrzymania po lewej stronie ułamki można otrzymać przez przemnożenie licznika i mianownika przez liczbę, co nie zmienia tezy.
   Wymnóżmy obie strony równania przez $(p-1)!$. Po lewej stronie otrzymamy $m\frac{(p-1)!}{n}$, gdzie $n|(p-1)!$ (bo ułamek zredukowany), czyli $\frac{(p-1)!}{n} \in \mathbb{Z}$. Po prawej stronie otrzymamy liczbę $\frac{(p-1)!}{1} + \frac{(p-1)!}{2} + \cdots + \frac{(p-1)!}{p-1}$. Zauważmy, że liczby $\frac{(p-1)!}{k}, \frac{(p-1)!}{l}$ dają różne reszty z dzielenia przez p, gdy $0 < k < l < p-1$. Gdyby bowiem było $\frac{(p-1)!}{k} \equiv \frac{(p-1)!}{l} (\mod p)$, to $(p-1)!(l-k) \equiv 0 (\mod p)$, czyli $p|k-l$ - sprzeczność.
   Ponadto żadna z liczb $\frac{(p-1)!}{k}$ nie daje reszty 0 z dzielenia przez p. Skoro tych liczb $p-1$, to muszą one dawać wszystkie możliwe niezerowe reszty z dzielenia przez p, stąd prawa strona daje resztę $1 + 2 + \cdots + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$, czyli ($p$ - nieparzyste) resztę 0. Lewa strona musi więc także dać tę resztę, więc $p|m\frac{(p-1)!}{n}$, czyli $p|m$.

3. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Na jego bokach, po zewnętrznej stronie dobudowano trójkąty równoboczne BCD, CAE, ABF. Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
   Rozwiązanie:
   Kluczowe jest spostrzeżenie (rysunkowe), że przez punkt przecięcia tych prostych przechodzą też okręgi opisane na równobocznych trójkątach BCD, CAE, ABF.
   Teraz to już tylko kwestia odpowiedniego zdefiniowania punktu przecięcia.
   Wiemy, że żaden z kątów ABC nie jest równy $120°$. Wtedy żadne 2 okręgi opisane na BCD, CAE, ABF nie są styczne (sprawdź!). Weźmy P - drugi (nie B) punkt przecięcia okręgów opisanych na ABF i BCD. Wtedy mamy $\angle APB = 120°$ i $\angle BPC = 120°$, stąd $\angle APC = 360° - \angle APB - \angle BPC = 120°$, stąd $\angle APC + \angle ADC = 180°$, więc P leży na okręgu opisanym na ACD.
   Weźmy prostą AD. Mamy $\angle APB = 120°$ i $\angle BPD = 60°$ (kąty wpisane), więc $\angle APD = 180°$, stąd P leży na AD. Analogicznie P leży na BE i CF. P nazywamy punktem Toriciellego. W rzeczywistości teza zachodzi dla dowolnych trójkątów.

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją 2 takie różne liczby 2^k, 2^l $(k, l \in \mathbb{Z}_+)$, że mają one tyle samo cyfr oraz jedna powstaje z drugiej przez permutowanie cyfr.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $k > l$. Wtedy $2^k > 2^l$. Z drugiej strony te liczby mają tyle samo cyfr, więc musi być $2^k < 10 \cdot 2^l$, czyli musi być $k = l + 1$ albo $k = l + 2$ albo $k = l + 3$.

Co się nie zmienia przy zamianie cyfr? Reszty z 9 oczywiście.

Popatrzmy na reszty z dzielenia przez 9 liczb postaci 2^k. Mamy

k	0	1	2	3	4	5	6
$2^k \mod 9$	1	2	4	8	7	5	1

Stąd wnosimy, że nie ma liczb postaci 2^k i 2^l, takich, że $l < k < l + 4$ i $2^k \equiv 2^l (\mod 9)$ (bo reszty są różne dla 6 kolejnych liczb).