Zadanka do OMa 2., trochę więcej niż ostatnio

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC, M będzie środkiem ciężkości ABC, zaś H będzie ortocentrum (punktem przecięcia wysokości) ABC. Niech ponadto D, E, F będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio.

   (a) Udowodnij, że O pokrywa się z ortocentrum trójkąta DEF.
   Rozwiązanie: Zauważmy, że mamy $\frac{AE}{AF} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AC} = \frac{AB}{AC}$, więc z tw. Talesa $EF||BC$ (i tak samo $DE||AB$ i $FD||AC$).
   Wiemy, że O leży na przecięciu symetralnych boków ABC. Weźmy symetralną boku AB. Przechodzi ona przez punkt F i jest prostopadła do AB, a więc jest też prostopadła do DE, jest więc wysokością w DEF spuszczoną z wierzchołka F.
   Analogicznie pozostałe symetralne są wysokościami O leży na przecięciu wysokości w DEF, więc O to ortocentrum DEF.

   (b) Wykaż, że M pokrywa się ze środkiem ciężkości DEF.
   Rozwiązanie: Oznaczmy jako G punkt przecięcia środkowej AD z EF. Wiemy, że $EF||BC$, stąd $GE||DC$ i $GF||DB$, więc z tw. Talesa

$$\frac{GE}{DC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{GF}{DB} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$$

   Stąd oraz z faktu, że $DB = DC$ mamy $\frac{GE}{GF} = \frac{GE}{DC}\frac{DB}{GF} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. G jest więc środkiem EF, więc środkowa GD pokrywa się ze środkową AD, stąd M pokrywa się z środkiem ciężkości DEF.

   (c) Udowodnij, że środek okręgu opisanego na DEF pokrywa się ze środkiem odcinka OH. Wskazówka: na przecięciu których prostych leży ten środek?
   Pierwszy sposób: Udowodnimy, że symetralne w trójkącie DEF przechodzą przez środek odcinka OH. A ściślej udowodnimy to, bez straty ogólności, dla symetralnej boku EF.
   Niech X oznacza rzut A na EF a Y oznacza rzut O na EF. Wiemy, że prosta prostopadła do EF i przechodząca przez środek odcinka XY przechodzi przez środek odcinka OH (z Talesa). Chcielibyśmy zatem, żeby środek odcinka XY był środkiem EF i to już wystarcza, żeby udowodnić tezę.
   Środek odcinka XY jest środkiem EF wtedy i tylko wtedy, gdy $XF = YE$. Zauważmy, że $AX||DY$ (obie są prostopadłe do EF) i $DE||AF$. Stąd (i z tego, że punkty E, F leżą po przeciwnych stronach AD) mamy $\angle XAF = \angle EDY$. Ponadto $\angle AXF = \angle DYE = 90$, więc $\triangle AXF \sim \triangle DYE$ (cecha kkk) a ponadto $AF = DE = \frac{1}{2}AB$, więc $\triangle AXF \equiv \triangle DYE$ i $XF = YE$, co już dowodzi tezy.
   Drugi sposób: Rozważmy jednokładność J o środku w M i skali $-\frac{1}{2}$ (o jednokładności będzie na którymś z najbliższych kółek). Wiemy, że środkowe przecinają się w stosunku $2:1$, więc mamy np. $2DM = MA$ i D, A leżą po różnych stronach M, stąd $J(A) = D$. Analogiczne $J(B) = E$ i $J(C) = F$, więc $J(ABC) = J(DEF)$.
   Ortocentrum trójkąta w jednokładności przechodzi na ortocentrum (bo wysokości przechodzą na siebie), więc $J(H) = O$, stąd O, M, H - wpsółliniowe (leżą na tzw. prostej Eulera) i $MH = 2MO$. Środki okręgów też przechodzą na siebie, więc O przechodzi na środek okręgu DEF. Ale z definicji jednokładności O przechodzi na punkt O^* leżący na prostej OM, po innej stronie M niż O i taki, że $MO = 2MO^*$. Mamy $OO^* = 2MO - MO^* = MH - MO^* = HO^*$, co dowodzi tezy.

(d) Powyższe 3 podpunkty liczą się jako 3 zadania.

2. Wykazać, że jeżeli $ABCD$ jest prostokątem i P leży na okręgu opisanym na $ABCD$, to $PA^2+PC^2 = PB^2 + PD^2$.
   Rozwiązanie: Zauważmy, że $\angle APC = \angle BPD = 90$, więc, z Pitagorasa $PA^2 + PC^2 = AC^2 = BD^2 = PB^2 + PD^2$. Założenie, że P należy do okręgu opisanego upraszcza sprawę, ale jest zbędne - teza zachodzi dla każdego P na płaszczyźnie.

3. Znaleźć wszystkie takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że $5 \not| n$ i $n^4 + 4^n$ jest liczbą pierwszą.
   Rozwiązanie: Jeżeli $2|n$, to $2|n^4 + 4^n$ i $n^4 + 4^n > 2$, więc na pewno nie jest to liczba pierwsza. Niech $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$). Dla $5 \not| n$ mamy $n^4 \equiv 1(\mod 5)$ (można policzyć 4 reszty albo z tw. Fermata) oraz $4^n = 16^k \cdot 4 \equiv 1^k \cdot 4 = 4(\mod 5)$, więc $5|n^4+4^n$, a dla $n > 1$ mamy $4^n+n^4 > 5$, więc dla $n > 1$ nie otrzymamy liczby pierwszej. Dla $n = 1$ faktycznie otrzymujemy liczbę pierwszą 5.

4. Jest tylko 5 zadań, więc obniżam próg na chałwę: trzeba rozwiązać 3/5, żeby ją dostać. Powodzenia. Mam nadzieję, że żadnego błędu nie ma, jak coś zauważycie, to od razu krzyczcie.