Zadanka do OMa 2., trochę więcej niż ostatnio

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC, M będzie środkiem ciężkości ABC, zaś H będzie ortocentrum (punktem przecięcia wysokości) ABC. Niech ponadto D, E, F będą środkami boków BC, CA, AB odpowiednio.
   (a) Udowodnij, że O pokrywa się z ortocentrum trójkąta DEF.
   (b) Wykaż, że M pokrywa się ze środkiem ciężkości DEF.
   (c) Udowodnij, że środek okręgu opisanego na DEF pokrywa się ze środkiem odcinka OH. Wskazówka: na przecięciu których prostych leży ten środek?
   (d) Powyższe 3 podpunkty liczą się jako 3 zadania.
2. Wykazać, że jeżeli $ABCD$ jest prostokątem i P leży na okręgu opisanym na $ABCD$, to $PA^2+PC^2 = PB^2 + PD^2$.
3. Znaleźć wszystkie takie $n \in \mathbb{Z}_+$, że $5 \nmid n$ i $n^4 + 4^n$ jest liczbą pierwszą.
4. Jest tylko 5 zadań, więc obniżam próg na chałwę: trzeba rozwiązać 3/5, żeby ją dostać. Powodzenia. Mam nadzieję, że żadnego błędu nie ma, jak coś zauważycie, to od razu krzyczcie.