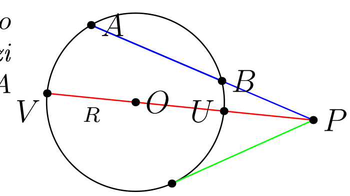
Potęga punktu

1.1 Teoria

Twierdzenie 1.1 (o siecznych, o stycznej) *Dany jest okrąg o o środku O i promieniu R oraz punkt P. Jeżeli prosta l przechodzi przez P i przecina okrąg o w (niekoniecznie różnych) punktach A i B, to iloczyn $|PA| \cdot |PB|$ nie zależy od wyboru l, a dokładniej*



$$|PA| \cdot |PB| = \left| |PO|^2 - R^2 \right|.$$

Definicja 1.2 (potęga punktu) *Przy powyższych oznaczeniach liczbę (być może ujemną!) $|PO|^2 - R^2$ nazywamy* ***potęgą punktu*** *P względem o i oznaczamy $p(P, o)$.*

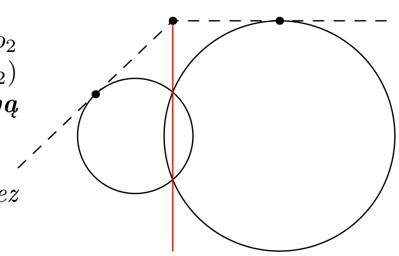
Wniosek 1.3

1. *$p(P, o) < 0$ gdy P leży we wnętrzu koła o brzegu o, $p(P, o) = 0$ gdy P leży na o oraz $p(P, o) > 0$, gdy P leży poza o.*
2. *przy oznaczeniach twierdzenia (nadal dla dowolnej prostej) mamy*

$$\begin{array}{ll} p(P, o) = -|PA| \cdot |PB| & \text{gdy } P \text{ leży wewnątrz } o \\ p(P, o) = |PA| \cdot |PB| & \text{inaczej} \end{array}$$

3. *Jeżeli P leży poza okręgiem o, to $p(P, o)$ jest kwadratem długości stycznej do o przechodzącej przez P.*

Twierdzenie 1.4 *Ustalmy dwa niewspółśrodkowe okręgi o_1, o_2 o środkach O_1, O_2. Zbiór punktów P takich, że $p(P, o_1) = p(P, o_2)$ jest* ***prostą prostopadłą*** *do O_1O_2; nazywamy ją* ***osią potęgową okręgów*** *o_1, o_2.*



Wniosek 1.5 *Jeżeli okręgi przecinają się, to prosta przechodzi przez punkty przecięcia.*

Twierdzenie 1.6 (Brianchona)** *Jeżeli w sześciokąt $ABCDEF$ da się wpisać okrąg to przekątne AD, BE, CF mają punkt wspólny.*

1.2 Zadania

1. Uzasadnij, że zbiór punktów mających potęgę względem danego okręgu o równą $p > 0$ jest okręgiem.

   Rozwiązanie.

   Niech R będzie promieniem o.

   Punkt P należy do tego zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy $p = p(P, o) = |PO|^2 - R^2$, czyli gdy $|PO| = \sqrt{p + R^2}$, innymi słowy gdy P leży na okręgu o środku O i promieniu $\sqrt{p + R^2}$.

2. *Eliminacje do PTM – przypomnienie.*

   Dane są okręgi O_1, O_2, przecinające się w punktach A, B. Punkt P leży na prostej AB, proste PX, PY są styczne do O_1, O_2 odpowiednio. Uzasadnić, że $\angle PXY = \angle PYX$.

   Rozwiązanie.

   Prosta AB jest osią potęgową O_1 i O_2, skoro więc punkt P leży na niej to $p(P, O_1) = p(P, O_2)$. Z teorii wiemy, że $p(P, O_1) = |PX|^2$, $p(P, O_2) = |PY|^2$, stąd $|PX|^2 = |PY|^2$, $|PX| = |PY|$, więc trójkąt PXY jest równoramienny, co kończy dowód.

3. **Twierdzenie 1.7 (Kryterium współokręgowości)** *Jeżeli punkty S, A, B oraz S, C, D leżą odpowiednio na dwu półprostych o początku w S to A, B, C, D leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$.*

   Zakładamy tutaj i dalej, że owe dwie półproste nie tworzą prostej, a punkty A, B i C, D są różne.

   Rozwiązanie.

   "wtedy".

   Jeżeli A, B, C, D leżą na jednym okręgu, to $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$.

   "tylko wtedy".

   Załóżmy zatem, że $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$. Okrąg opisany na A, B, C przecina półprostą SC w punkcie D' (gdy jest on styczny przyjmujemy $D' = C$). Korzystając z implikacji "wtedy" obliczam $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$.

   Łącznie $|SC| \cdot |SD| = |SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD'|$, czyli $|SD| = |SD'|$, $D = D'$.

4. Uzasadnij, że teza poprzedniego twierdzenia zachodzi również, gdy S leży na odcinkach AB i CD.

   Rozwiązanie. Identycznie jak w poprzednim przypadku.

5. Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MB \cdot ME = MC \cdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

   Rozwiązanie. Skoro $MB \cdot ME = MC \cdot MF$ to (z powyższego kryterium) B, E, C, F leżą na jednym okręgu o, a skoro tak to $AE \cdot AC = p(A, o) = AF \cdot AB$.

6. Dane są okręgi o_1, o_2 oraz punkt P. Półproste k i l mają początek w P i przecinają: k okrąg o_1 w A, B, zaś l okrąg o_2 w C, D ($A \neq B$, $C \neq D$). Udowodnić, że na A, B, C, D da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy P leży na osi potęgowej o_1 i o_2.

   Rozwiązanie. Oba warunki z zadania są równoważne równości $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

7. Okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach K i L i są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach A, B odpowiednio, przy czym promień o jest większy od promieni o_1 i o_2. Prosta k jest styczna zewnętrznie do o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Proste AC i BD przecinają się w S. Wykazać, że K, L, S są współliniowe.

   Rozwiązanie. Niech O, O_1, O_2 oznaczają środki odpowiednich okręgów.

   Potrzebny nam będzie fakt, że S leży na o. Niech S' będzie przecięciem BD z o. Punkty B, O_2, O są współliniowe, więc trójkąty BO_2D i BOS' są równoramienne o wspólnym kącie, stąd $\angle BDO_2 = \angle BS'O$, zatem CD jest równoległe do stycznej do o w punkcie S'.

   Analogicznie konstruując z AC punkt S'' stwierdzamy, że styczna w S'' jest również równoległa do CD, a więc $S' = S''$ (punkty S' i S'' leżą po tej samej stronie CD).

   To dowodzi, że $S' = S''$ jest punktem przecięcia AC i BD, więc $S' = S$.
   Korzystając z poprzedniego zadania, S leży na KL, czyli na osi potęgowej O_1 i O_2 jeżeli na $ABCD$ da się opisać okrąg. Trójkąty BOS i BO_2D są równoramienne, więc zachodzą równości

   $$\angle BAC = \angle BAS = \frac{1}{2}\angle BOS = 90^\circ - \angle OBS$$

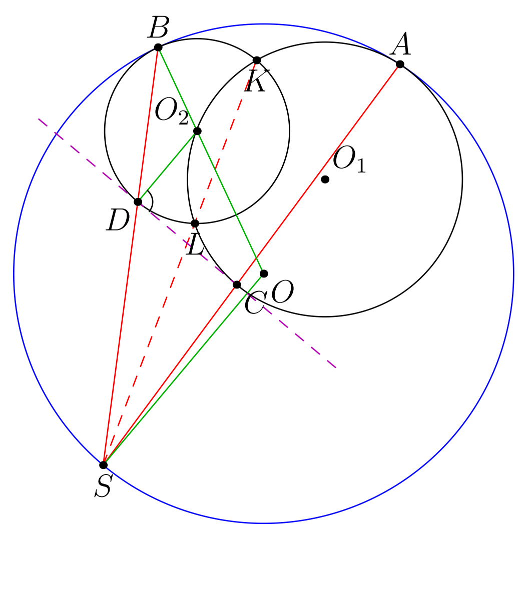
   oraz

   $$\angle BDC = \angle BDO_2 + \angle O_2DC = \angle BDO_2 + 90^\circ$$

   stąd

   $$\angle BDC + \angle BAC = 180^\circ,$$

   czyli na $ABCD$ da się opisać okrąg, co kończy dowód.



1.3 Oś potęgowa

1. Jeśli okręgi o_1, o_2, o_3 są takie, że $o_1 \cap o_2 = \{A, B\}$, $o_2 \cap o_3 = \{C, D\}$, $o_3 \cap o_1 = \{E, F\}$, to proste AB, CD, EF albo są wszystkie równoległe, albo przecinają się w jednym punkcie.

   Rozwiązanie.

   Niech S będzie punktem przecięcia AB i CD. Skoro są to osie potęgowe to $p(S, o_1) = p(S, o_2)$ i $p(S, o_2) = p(S, o_3)$, a więc również $p(S, o_1) = p(S, o_3)$, czyli $P \in EF$.

2. Uzasadnij, że wysokości w trójkącie ABC przecinają się w jednym punkcie.

   Rozważ okręgi o średnicach AB, BC, CA.

   Rozwiązanie.

   Niech o_{AB}, o_{BC}, o_{CA} oznaczają okręgi o średnicach AB, BC, CA odpowiednio. Zauważmy, że osiami potęgowymi par okręgów są wysokości w trójkącie.

   Zaiste niech k oznacza oś potęgową o_{AB} i o_{CA}. Wtedy $A \in k$, gdyż $A \in o_{AB} \cap o_{CA}$, a ponadto $k \perp M_{AB}M_{CA}||BC$, czyli k jest wysokością.

   M_{XY} oznacza środek odcinka XY.

3. * W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ mamy równości odcinków: $FA = AB$, $BC = CD$, $DE = EF$. Udowodnić, że wysokości trójkątów ABC, CDE, EFA, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków B, D, F przecinają się w jednym punkcie. *Rozważ odp. okręgi.*

   Rozwiązanie.

   Rozważmy okręgi o_A, o_C, o_E o środkach w A, C, E i promieniach AB, CD, EF odpowiednio.

   Analogicznie jak w poprzednim zadaniu udowadniamy, że osiami potęgowymi okręgów są wysokości z treści zadania.

   Osie te mają punkt wspólny, co kończy dowód.

4. * Nieprostopadłe przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Wykazać, że prosta przechodząca przez ortocentra BCE i ADE jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki odcinków AB i CD.

   Wsk.: udowodnić, że ortocentra leżą na osi potęgowej okręgów, których średnicami są AB i CD.

   Rozwiązanie. Niech dla skrótu o_{XY} oznacza okrąg o średnicy XY, h_X dla $X \in \{E, B, C\}$ oznacza wysokość w trójkącie EBC wypuszczoną z wierzchołka X, a $k \cap l \cap n$ oznacza przecięcie prostych k, l, n.

   Niech H oznacza ortocentrum BCE, innymi słowy $H = h_E \cap h_B \cap h_C$. Zauważmy, że h_B, h_E, h_C są osiami potęgowymi par okręgów: o_{AB} i o_{EB}, o_{EB} i o_{EC}, o_{EC} i o_{CD}.

   Stąd $p(o_{AB}, H) = p(o_{EB}, H) = p(o_{EC}, H) = p(o_{CD}, H)$, czyli H leży na osi potęgowej o_{AB} i o_{CD}.

   Analogicznie ortocentrum ADE leży na tej osi, zatem prosta przechodząca przez te (różne!) punkty jest osią potęgową o_{AB} i o_{CD}, czyli jest prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów.