Kółko 12.1 - potęga teorii potęgi punktu

Teoria

1. **Definicja 0.1** *Niech będzie dany okrąg o i punkt A. Niech prosta k przechodzi przez punkt A i przecina okrąg o w punktach B i C. Wtedy* **potęgą punktu A** *względem okręgu o nazywamy iloczyn $AB \cdot AC$, jeżeli punkt A leży na zewnątrz okręgu i $-AB \cdot AC$, jeżeli leży on wewnątrz. Iloczyn ten jest niezależny od wyboru prostej k!*

2. Jeżeli A leży na zewnątrz okręgu o, potęga punktu A względem o jest równa $|AD|^2$, gdzie AD to styczna do okręgu o, przechodząca przez A. Potęga ta jest więc też równa wtedy $|AO|^2 - r^2$. Ogólniej potęga A względem o jest **zawsze** równa $|AO|^2 - r^2$. Zauważmy, że punkty leżące na okręgu mają potęgę równą 0.

3. Przyda się też poczciwy Pitagoras :]

4. Punkty A, B, C leżą na prostej k w tej kolejności, a punkty A, D, E leżą na prostej l w tej kolejności ($k \neq l$). Jest $AB \cdot AC = AD \cdot AE$, wtedy i tylko wtedy, gdy punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu.

Zadania łatwiejsze

1. Udowodnij, że dla danego okręgu o wszystkie punkty mające potęgę względem o równą p (p -stała) leżą na jednym okręgu o środku w o.

2. Udowodnij, że dla punktu A leżącego wewnątrz okręgu o definicja potęgi jest prawidłowa (tj. faktycznie iloczyn nie zależy od prostej).

3. Udowodnij to samo dla punktu leżącego na zewnątrz okręgu.

4. Punkty E, F leżą na bokach AC, AB trójkąta ABC odpowiednio. Odcinki BE i CF przecinają się w M i zachodzi $MB \cdot ME = MC \cdot MF$. Udowodnij, że zachodzi $AE \cdot AC = AF \cdot AB$. (źródło - staszic)

5. Okrąg o jest styczny do prostej k w punkcie D. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do k, punkt C leży na k, odcinki AC i BC przecinają okrąg o w punktach E i F (różnych od A, B) odpowiednio. Udowodnić, że prosta EF przecina k w środku odcinka CD. (źródło - staszic)

6. Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia warunki $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Udowodnij, że wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB, opuszczone z wierzchołków C, E, A przecinają się w jednym punkcie. (źródło - staszic)

Zadania trudniejsze

1. **Definicja 0.2** *Dane są 2 okręgi o różnych środkach. Osią potęgową dwóch okręgów o_1, o_2 nazywamy zbiór punktów mających równe potęgi względem o_1 i o_2*

   Udowodnij, że ten zbiór jest prostą prostopadłą do prostej łączącej środki tych okręgów. Wskazówka: spróbuj zrzutować dowolny punkt na prostą i trochę podanalizować.

2. Dane są okręgi o_1, o_2, o_3, takie, że $o_1 \cap o_2 = \{A, B\}$, $o_2 \cap o_3 = \{C, D\}$, $o_3 \cap o_1 = \{E, F\}$, to proste AB, CD, EF albo są wszystkie równoległe, albo przecinają się w jednym punkcie.