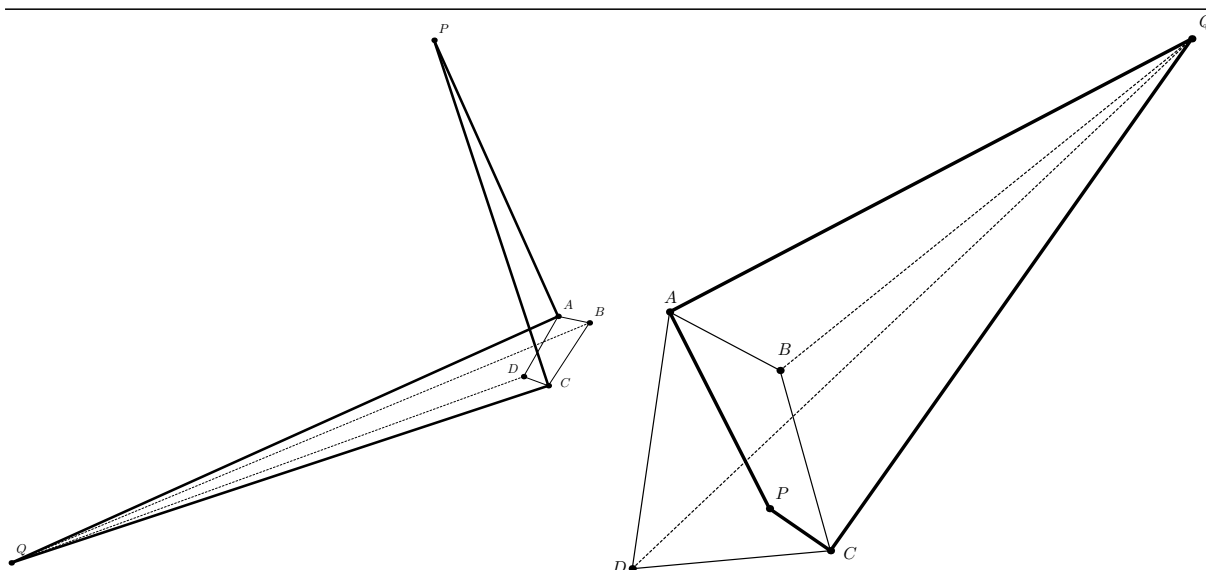




# OMówienie

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK  
11 GRUDNIA 2012



## Zadania świąteczne z [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl) i nie tylko, łatwe i nie tylko

### ZADANIE 1

Oznaczmy przez  $[x]$  największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$ . Uzasadnij, że tylko dla skończonego wielu liczb naturalnych  $n$  liczba  $[n^2/3]$  jest pierwsza.

### ZADANIE 2

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{5}{3} - \frac{2}{2n+1}.$$

*A gdybyś chciał(a) potrenować trik z dwunastego zadania, to poniższe (wzięte z [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl)) opiera się na podobnym pomysle, tylko trzeba dokładnie szacować (z pomocą kalkulatora?)*

### ZADANIE 3

Udowodnij, że istnieje  $10^{100}$  kolejnych liczb całkowitych dodatnich nie większych od  $10^{2012}$ , z których żadna nie jest postaci  $a^3 + b^4 + c^5 + d^6$ , gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami całkowitymi dodatnimi.

## Teoria z 11 i dalszych okolic rozpisana na zadania

### ZADANIE 4

Dany jest kąt  $ACB$ . Udowodnij, że zbiór punktów równoodległych od jego ramion składa się z dwusiecznej kąta  $ACB$  i dwusiecznej kąta przyległego do  $ACB$ .

### ZADANIE 5 OKRĄG APOLONIUSZA

Weźmy na płaszczyźnie różne punkty  $A, B$  oraz liczbę dodatnią  $k \neq 1$ . Udowodnij, że zbiór  $\mathcal{O}$  punktów  $X$  takich, że  $X \neq A, B$  oraz

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k$$

jest okręgiem o środku leżącym na prostej  $AB$ .

*Rozpisanie zadania na podpunkty (można inaczej np. przez przeliczenie na współrzędnych):*

1. Dla  $X \in \mathcal{O}$  nie leżącego na prostej  $AB$  oznaczmy przez  $D, E$  punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznego i zewnętrznego  $AXB$  z prostą  $AB$ . Dowiedz, że  $D, E \in \mathcal{O}$  i położenie punktów  $D, E$  nie zależy od  $X$ .
2. Uzasadnij, że wszystkie punkty z  $\mathcal{O}$  leżą na okręgu o średnicy  $DE$ .
3. Weź dowolny punkt na okręgu o średnicy  $DE$  i wykaż, że należy on do  $\mathcal{O}$ .

