

## Zadanko o pomnikach

**Zadanie** Mamy  $n$  pomników Endrju Wspaniałego. Między każdymi dwoma pomnikami jest dwustronne bezpośrednie połączenie. Połączenia obsługiwane są przez  $k$  przewoźników (dane połączenie obsługuje w obie strony ten sam przewoźnik). Udowodnić, że istnieją takie 3 pomniki, że wszystkie połączenia między nimi obsługuje ten sam przewoźnik, dla:

1.  $n = 6, k = 2$
2.  $n = 17, k = 3$
3.  $n = 66, k = 4$

**Rozwiązanie:**

Indukcyjnie po  $k$ .

Nazwijmy przewoźników  $A, B, C, D, \dots$ . Dla  $n = 6, k = 2$  wybierzmy dowolny pomnik. Ma on 5 połączeń do innych pomników i jest 2 przewoźników, więc z Dirichleta ma co najmniej  $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$  połączenia obsługiwane przez jednego przewoźnika, którego nazwiemy  $A$ . Jeżeli pomiędzy którymkolwiek dwoma pomnikami z tych trzech jest połączenie obsługiwane przez  $A$ , to mamy tezę. Jeżeli nie, to wszystkie połączenia między tymi trzema pomnikami obsługuje  $B$  i też mamy tezę.

Jeżeli  $n = 17, k = 3$ , to wybieramy dowolny pomnik. Ma on co najmniej  $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 6$  połączeń obsługiwanych przez jednego przewoźnika, nazywanego  $A$ . Jeżeli w zbiorze połączeń między tymi 6 (lub więcej) pomnikami jest połączenie obsługiwane przez  $A$ , to mamy tezę. Jeżeli nie, to mamy 6 pomników, pomiędzy którymi połączenia obsługują dwaj przewoźnicy. Z poprzedniego dowodu mamy tezę.

Jeżeli  $n = 66, k = 4$ , to analogicznie, dowolny pomnik ma co najmniej  $\lceil \frac{65}{4} \rceil = 17$  połączeń obsługiwanych przez 1 przewoźnika, więc jeżeli obsługuje on jeszcze jakiekolwiek połączenie między tymi pomnikami, to już mamy tezę, jeżeli nie to jest 17 pomników i 3 przewoźników obsługujących połączenie między nimi, z poprzedniego dowodu idzie.

Na rysunku widać to ładniej, bo całe zadanie jest grafowe. Liczby  $n$ , w zależności od  $k$  nazywają się liczbami Ramseya.