Trójkąt Pascala

Joachim Jelisiejew
13 września 2011

Mamy następujące
Zadanie 1
Policzyć, ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$?
Pierwszy krok: oznaczmy mądrze problem $\ddot\smile$.

Definicja 1.1. *Niech $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Oznaczenie $\binom{n}{k}$ czytamy "n po k".*

Drugi krok: jak możemy wybrać k-elementowy podzbiór?

Obserwacja 1.2. *Wszystkie elementy lub 0 elementów możemy wybrać na jeden sposób:*

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

dla każdego n.

Obserwacja 1.3. *Zauważmy, że wybierając k-elementowy podzbiór możemy wybrać element "n" lub nie. Tak więc*

$$\begin{gathered}\binom{n}{k} = \textit{liczba } k\textit{-elementowych podzbiorów}\{1, \ldots, n\} = \\ \textit{liczba } k\textit{-elementowych podzb.}\ \{1, 2, \ldots, n\}\ \textit{zawierających } n\ + \\ \textit{liczba } k\textit{-elementowych podzb.}\ \{1, 2, \ldots, n\}\ \textit{nie zawierających } n = \\ \textit{liczba } k-1\textit{-elementowych podzb.}\ \{1, 2, \ldots, n-1\} + \\ \textit{liczba } k\textit{-elementowych podzb.}\ \{1, 2, \ldots, n-1\} = \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.\end{gathered}$$

Łącznie obserwacje te pozwalają obliczyć np.

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1} = 1 + \binom{2}{1} = 1 + \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 3.$$

Zwykle $\binom{n}{k}$ przedstawia się w postaci tzw. **trójkąta Pascala**:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

wzory — wartości

Zadanie 2
Uzasadnij z definicji, że $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
Zadanie 3
Udowodnij, że

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

np. korzystając ze wzoru z obserwacji 1.3.
Zadanie 4
Udowodnij, że jeśli liczba p jest pierwsza, to $p \,\Big|\, \binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

1.1 Wzór dwumianowy Newtona

Trzeci krok: jak jeszcze możemy wybrać k-elementowy podzbiór?

Możemy zdecydować, czy wybieramy element "1" czy nie, czy wybieramy element "2" czy nie itd. Musimy tylko uważać, żeby łącznie wybrać k elementów.

Przykładowo: podzbiory zbioru $\{1,2\}$ to $\{1,2\},\{1\},\{2\},\{\}=\emptyset$.

Załóżmy, że TAK oznacza, że wybieram, że element, NIE oznacza, że nie wybieram elementu. Wtedy podzbiór $\{2\}$ to TAK, NIE, a zbiór $\{1,2\}$, TAK, TAK. Można pójść dalej i zapisać wszystkie podzbiory jako

$$TAK, TAK; TAK, NIE; NIE, TAK; NIE, NIE \text{ lub,}$$

$$\text{z lekkim nadużyciem } (TAK, NIE)(TAK, NIE) = (TAK, NIE)^2.$$

Zbiory k-elementowe to te, w których TAK występuje dokładnie k-razy, nie zważając na kolejność: TAK, NIE i NIE, TAK, czyli kolejność nie ma znaczenia.

Można zapisać, że

$$(TAK + NIE)^2 = TAK^2 + TAK \cdot NIE + NIE \cdot TAK + NIE^2 = TAK^2 + 2 \cdot TAK \cdot NIE + NIE^2 =$$

$$\binom{2}{0} TAK^2 + \binom{2}{1} TAK \cdot NIE + \binom{2}{2} NIE^2.$$

Ogólnie, możemy to zapisać jako

Twierdzenie 1.4 (Wzór dwumianowy Newtona)**.**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

przykładowo $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Formalny dowód tego wzoru jest w zasadzie powtórzeniem tego, co jest powiedziane wyżej, ale będzie on jeszcze pokazany na kółkach.