



Zadania z etapów

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK
26 MARCA 2012

ZADANIE 1

Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x , że dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

ZADANIE 2

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b . Udowodnij, że

$$d \geq \sqrt{a+b}.$$

ZADANIE 3

Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n + 2}$$

na n -tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

ZADANIE 4

Dowiedź, że istnieje nieskończenie wiele takich n całkowitych dodatnich, że suma cyfr w zapisie dziesiętnym liczby $2^n + n$ jest mniejsza niż suma cyfr liczby 2^n .

ZADANIE 5

Niech p będzie liczbą liczb pierwszych w zbiorze $\{1, 2, \dots, 2012^{2012}\}$. Dowiedź, że wśród dowolnych $p + 1$ liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych liczb.

ZADANIE 6

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD . Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że jeżeli $KP = LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

ZADANIE 7

Czy na powierzchni każdego czworościanu $ABCD$ można wskazać takie cztery punkty $X \in \triangle BCD, Y \in \triangle ACD, Z \in \triangle ABD, T \in \triangle ABC$, z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie czworościanu i takie, że spełniony jest warunek *?

1. Jeżeli $* = XYZT$ jest równoległobokiem,
2. Jeżeli $* = XYZT$ jest rombem,
3. Jeżeli $* = XYZT$ jest kwadratem,

W których z powyższych sytuacji można znaleźć punkty X, Y, Z, T nie leżące na krawędziach?

☺ 8

ZADANIE RATUNKOWE — gdyby ktoś widział/rozwałił powyższe zadania, proponuję powiedzieć mi o tym — dam “czekadelfka”.