26.03 - The best of OMG

Zadania z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

1. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym co najwyżej 1 mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których jest to możliwe.

2. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od S. Wykaż, że $|AB| > 2|CD|$.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

4. Każda z liczb $x_1, x_2, \cdots, x_{101}$ jest równa ± 1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1$$

5. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta l przechodząca przez jego środek. Niech a, b, c, d oznaczają odległości punktów A, B, C, D od prostej l. Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.
Rozwiązanie:
Możemy tak zmienić naweznictwo wierzchołków, że l będzie przecinała bok AB kwadratu $ABCD$ (być może w A lub w B) i wierzchołki A, B, C, D będą posortowane przeciwnie do wskazówek zegara względem środka kwadratu. Nie zmieni to niczego w tezie.
Jeżeli prosta l przechodzi przez wierzchołek kwadratu, to jej odległości od 2 wierzchołków będą wynosić $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a od pozostałych dwóch 0, więc teza zachodzi. Dalej zakładamy, że l nie przechodzi przez żaden wierzchołek.
Niech A' oznacza rzut A na l, a B' rzut B na l oraz niech O oznacza środek kwadratu $ABCD$, a E środek boku AB. Skoro prosta l nie przechodzi przez A ani przez B, to $A' \neq A$ i $B' \neq B$, więc proste AA', BB' są określone poprawnie.
Rozważmy obrót $O_E^{-90^\circ}$ o -90° wokół E. Przenosi on A na O, a O na B, przenosi on więc prostą AA' na prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez obraz punktu A: $O_E^{-90^\circ}(A) = O$, a więc przenosi on AA' na l.
Analogicznie stwierdzamy, że obrót ten przenosi l na prostą prostopadłą do l i przechodzącą przez $O_E^{-90^\circ}(O)$, a więc przenosi on l na BB'. Stąd wnosimy, że przenosi on punkt przecięcia AA' z l na punkt przecięcia l z BB', a więc przenosi on A' na B': $O_E^{-90^\circ}(A') = B'$!
Tym samym jest $O_E^{-90^\circ}(A) = O$ i $O_E^{-90^\circ}(A') = B'$, a więc $O_E^{-90^\circ}(AA') = OB'$, więc $|AA'| = |OB'|$ i obliczamy

$$|AA'|^2 + |BB'|^2 = |OB'|^2 + |BB'|^2 = |OB|^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

Analogicznie $|CC'|^2 + |DD'|^2 = \frac{1}{2}$, co daje tezę.

6. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, że liczba $a + b$ jest pierwsza oraz liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 3.
Rozwiązanie:
Sposób 1. Małe twierdzenie Fermata orzeka, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to

$$a^p \equiv a \mod p$$

dla wszystkich a całkowitych.
Stosując je do $p = 3$ otrzymujemy $a^3 \equiv a \mod 3$, a więc $a^3 + b^3 \equiv a + b \mod 3$. Z treści zadania $3|a^3 + b^3$, a więc $3|a + b$. Ale $a + b$ miało być pierwsze, więc $a + b = 3$, czyli $(a, b) = (1, 2)$ lub $(a, b) = (2, 1)$. Obie te pary spełniają warunki zadania.

Rozwiązanie:
Sposób 2. Zamiast udowadniać tożsamość $a^3 \equiv a \mod 3$ korzystając z małego twierdzenia Fermata, udowodnijmy ją wprost rozpatrując wszystkie reszty z dzielenia przez 3:

$$0^3 = 0, \quad 1^3 = 1, \quad 2^3 = 8 \equiv 2 \mod 3$$

Dalsze rozumowanie jak w sposobie **1**.

Rozwiązanie:
Sposób 3. (Marty) Skorzystajmy ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Jeżeli $3|a + b$ to rozumujemy jak w sposobie **1**, jeżeli nie, to z $3|a^3 + b^3$ wynika $3|a^2 - ab + b^2$. Sprawdzamy 9 kombinacji reszt z dzielenia przez 3 i dochodzimy w każdym wypadku do wniosku, że jeżeli $3 \nmid a + b$, to $3 \nmid a^2 - ab + b^2$.

7. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \cdots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43?

8. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1$$

Rozwiązanie:
Sposób 1 Oczywiście nierówność tę można udowodnić wprost przez sprowadzenie do wspólnego mianownika i jest to zapewne najszybsza metoda.
Obliczenia stają się jednak dość paskudne. Można wpaść na pomysł rozłożenia $\frac{a}{a+1}$ na $1 - \frac{1}{a+1}$. Jest to o tyle intuicyjnie, że chcemy z lewej strony otrzymać 1, którą mamy z prawej. Obliczamy więc:

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$$

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} = 1 + \frac{b}{(a+1)(b+1)} - \frac{b+1}{(a+1)(b+1)} = 1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)}$$

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} =$$

$$1 - \frac{c+1}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1$$

To dowodzi tezy w sposób mniej rachunkowy.
Rozwiązanie:
Sposób 2 Jeżeli brzydzimy się rachunkami, to możemy popatrzeć na nierówność z zadania pod kątem każdej ze zmiennych. Nierówność ta jest „najprostsza" jeżeli popatrzymy na zmienną c, która wystepuje tylko w wyrażeniu $\frac{c}{c+1}$. Wyrażenie to, gdy $c > 0$, przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1)$. Możemy więc oszacować $\frac{c}{c+1} < 1$ (a jest to dobre oszacowanie, bo to wyrażenie przyjmuje wartości dowolnie bliskie) i

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < \frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+1)(b+1)} = \frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1} = 1$$

9. Okrąg o promieniu 1 jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg ten jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wiadomo, że

$$\angle KLM = 4\angle AKN \text{ oraz } \angle KNM = 4\angle BKL$$

Obliczyć długość LN.
Rozwiązanie:
Czworokąt $KLMN$ jest wpisany w okrąg z zadania, więc

$$\angle KLM + \angle KNM = 180^\circ$$

Stąd obliczam $\angle AKN + \angle BKL = 45^\circ$. Jest ponadto $\angle AKN + \angle NKL + \angle LKB = 180^\circ$, więc $\angle NKL = 135^\circ$, czyli $\angle NML = 45^\circ$ i $\angle NOL = 90^\circ$, gdzie O to środek okręgu. Trójkąt $\triangle NOL$ jest więc prostokątny równoramienny i $|NL|^2 = 1^2 + 1^2, |NL| = \sqrt{2}$.

10. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne 4 nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

zadania pochodzą z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zamieszczone rozwiązania zadań z I etapów nie są w żaden sposób uwierzytelnione przez OMG, rozwiązania pozostałych zadań znajdują się na stronie **http://sem.edu.pl/omg/**

2 Dirichlety, jeden trudniejszy, drugi standardowy

1. Niech M będzie 10 elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \cdots, 100\}$. Dowieść, że zbiór M zawiera 2 rozłączne niepuste podzbiory o takiej samej sumie elementów.
Rozwiązanie:
Zauważmy najpierw, że jeżeli znajdziemy w M dwa różne niepuste podzbiory o równych sumach elementów, to możemy od każdego z tych pozbiorów odjąć ich część wspólną, otrzymując 2 rozłączne podzbiory o równych sumach elementów. Ponadto, zbiory te są niepuste. Dowodzimy tego przez zaprzeczenie: gdyby któryś ze zbiorów był pusty, to miałby sumę równą 0, a więc drugi zbiór miałby sumę równą 0, a skoro wszystkie elementy są dodatnie, to byłby on również pusty, czyli zbioru początkowe (przed odjęciem części wspólnej) byłyby równe. Sprzeczność.
Odnajdziemy teraz w M dwa różne podzbiory o równych sumach. Podzbiory M mają sumy w zakresie od 1 do $100 + 99 + 98 + \cdots + 91 < 1000$, różnych sum jest więc nie więcej niż $1000 - 1 + 1 = 1000$. Różnych niepustych podzbiorów M jest $2^{10} - 1 = 1023 > 1000$. Stąd wynika, że pewne 2 różne podzbiory mają równe sumy.

2. ** Niech M będzie 10 elementowym podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2, \cdots, 99\}$. Dowieść, że zbiór M zawiera 2 rozłączne niepuste podzbiory o takiej samej sumie elementów.

zadania ze zbiorów V LO w Krakowie