26.03 - The best of OMG

Zadania z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

1. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym co najwyżej 1 mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których jest to możliwe.
2. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od S. Wykaż, że $|AB| > 2|CD|$.
3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.
4. Każda z liczb $x_1, x_2, \cdots, x_{101}$ jest równa ± 1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1$$
5. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta l przechodząca przez jego środek. Niech a, b, c, d oznaczają odległości punktów A, B, C, D od prostej l. Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.
6. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, że liczba $a + b$ jest pierwsza oraz liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 3.
7. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \cdots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43?
8. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że
$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1$$
9. Okrąg o promieniu 1 jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg ten jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wiadomo, że
$$\angle KLM = 4\angle AKN \text{ oraz } \angle KNM = 4\angle BKL$$
Obliczyć długość LN.
10. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne 4 nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

zadania pochodzą z Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

2 Dirichlety, jeden trudniejszy, drugi standardowy

1. Niech M będzie 10 elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \cdots, 100\}$. Dowieść, że zbiór M zawiera 2 rozłączne niepuste podzbiory o takiej samej sumie elementów.
2. ** Niech M będzie 10 elementowym podzbiorem zbioru $\{0, 1, 2, \cdots, 99\}$. Dowieść, że zbiór M zawiera 2 rozłączne niepuste podzbiory o takiej samej sumie elementów.

   Wskazówka: Odrzucić część podzbiorów M, żeby zaostrzyć ograniczenia, nie rozważać ograniczenia dolnego i górnego osobno.

zadania ze zbiorów V LO w Krakowie