Vivat! Komb. finałowe

kółko I LO Białystok

26 marca 2012

Zadanie 1

Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$ o następującej własności: istnieje taka permutacja $(a_1, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$, że dla $k = 1, 2, \ldots, n$ suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ jest podzielna przez k.

Zadanie 2

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF, przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE. Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie $\triangle ABC$.

Zadanie 3

Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y)$$