CHOINKA BEZWZGLĘDNA

Stare OMy

---

1. Zadanie
Na okręgu obrano $n > 2$ punktów i każdy z nich połączono odcinkiem z każdym innym. Czy można wykreślić wszystkie te docinki jednym ciągiem tak, żeby koniec ostatniego odcinka był początkiem pierwszego wykreślonego? *Źródło: III OM*

2. Zadanie
Dowieść, że kwadrat można podzielić na dowolną większą od 5 liczbę kwadratów, ale nie można go podzielić na 5 kwadratów. *Źródło: XVI OM*

3. Zadanie
W przestrzeni leży $2n$ punktów. Udowodnić, że istnieje taka płaszczyzna, nie przechodząca przez żaden z tych punktów, że w każdej z półprzestrzeni, na które dzieli ona przestrzeń, leży n punktów. *Źródło: XVIII OM*

4. Zadanie
Udowodnić, że przy każdym podziale płaszczyzny na trzy zbiory w co najmniej jednym z nich istnieją dwa punkty odległe o 1. *Źródło: XXI OM*

5. Zadanie
Znaleźć największą liczbę naturalną k o następującej własności: istnieje k takich różnych podzbiorów zbioru n-elementowego, że każde dwa mają część wspólną. *Źródło: XXI OM*

6. Zadanie
W wielościan wypukły można wpisać sferę. Ściany tego wielościanu można pokolorować dwoma kolorami tak, że ściany jednego koloru nie mają wspólnych krawędzi. Uzasadnić, że suma pól ścian jednego koloru jest równa sumie pól ścian drugiego koloru. *Źródło: XXVI OM*

7. Zadanie
Antek i Czeczko grają w następującą grę: na tablicy napisana jest liczba całkowita dodatnia n. Gracz, na którego przypada kolejka wybiera dzielnik d ($d \neq n$) liczby n i zmienia liczbę na tablicy na $n - d$. Gracz, który dostaje na tablicy $n = 1$ przegrywa.

   Antek zaczyna, potem gracze wykonują ruchy naprzemiennie. Zakładając, że Czeczko ogarnia, dla jakich n Antek wygra z nim? *Źródło: XXVII CzeczkOM*

8. Zadanie
W turnieju Doty uczestniczy $2n$ ($n > 1$) zawodników. Turniej składa się z pojedynków jeden-na-jeden, każda para zawodników rozgrywa co najwyżej jeden. Dowieść, że jeśli żadna trójka nie rozegrała pomiędzy sobą wszystkich trzech partii to liczba rozegranych partii nie przekracza n^2. *Źródło: XXXVII OM*

9. Zadanie
Na szachownicy o wymiarach 1000×1000 pokolorowanej standardowo wybrano 1000-polowy zbiór A. Udowodnić, że jeśli pomiędzy każdymi dwoma punktami z A istnieje droga złożona z sąsiadujących bokami pól A, to A zawiera co najmniej 250 pól białych. *Źródło: XXXVIII OM*

10. Zadanie
Rozważamy grę w “samotnika”: na nieskończonej szachownicy stoją piony, tworząc prostokąt o liczbie pól podzielnej przez 3.

    Jeżeli na dwóch polach mających wspólny bok stoją piony, a kolejne (w linii pionowej lub poziomej) pole jest puste, to możemy te piony usunąć i postawić pion na trzecim z pól.

    Udowodnij, że nie da się w ten sposób uzyskać sytuacji, gdy na szachownicy jest tylko jeden pion. *Źródło: XXXIV OM*