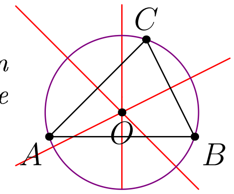
# Punkty szczególne w trójkącie

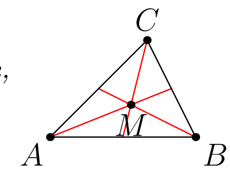
kółko I LO Białystok
16 stycznia 2012

---

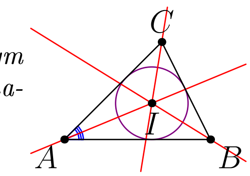
**Twierdzenie 1.1.** *Trzy symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, będącym* środkiem okręgu opisanego *na trójkącie. Punkt ten zwykle oznaczamy $O$.*



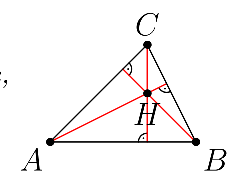

**Twierdzenie 1.2.** *Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zwanym* środkiem ciężkości *trójkąta. Punkt ten zwykle oznaczamy $M$.*




**Twierdzenie 1.3.** *Trzy dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, będącym* środkiem okręgu wpisanego *w trójkąt. Punkt ten zwykle oznaczamy $I$.*




**Twierdzenie 1.4.** *Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zwanym* ortocentrum *trójkąta. Punkt ten zwykle oznaczamy $H$.*




### Zadanie 1
Uzasadnij, że jeśli $\triangle ABC$ jest równoboczny, to $I = O = H = M$, gdzie $I, O, H, M$ są punktami szczególnymi $\triangle ABC$ zdefiniowanymi wyżej.

### Zadanie 2
W pewnym trójkącie $H$ pokrywa się z $O$. Udowodnij, że trójkąt ten jest równoboczny.

### Zadanie 3
W pewnym trójkącie $I$ pokrywa się z $O$. Udowodnij, że trójkąt ten jest równoboczny.

### Zadanie 4
Niech $A_1, B_1, C_1$ oznaczają odpowiednio środki boków $BC, CA, AB$ trójkąta $\triangle ABC$. Który z punktów szczególnych $\triangle ABC$ jest równy środkowi ciężkości $\triangle A_1B_1C_1$ a który jest równy ortocentrum $\triangle A_1B_1C_1$?

### Zadanie 5
Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem.

Niech $H_A, H_B, H_C$ będą przecięciami wysokości opuszczonych z $A, B, C$ z bokami $BC, CA, AB$ odpowiednio. Uzasadnij, że wysokości $\triangle ABC$ są dwusiecznymi trójkąta $\triangle H_AH_BH_C$ i wywnioskuj, że $H$ jest środkiem okręgu wpisanego w $H_AH_BH_C$.

### Zadanie ⋆ 6
Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem.

Uzasadnij, że istnieje okrąg styczny do boku $AB$ od zewnątrz oraz do przedłużeń boków $CA, CB$. Nazywamy go *okręgiem dopisanym* do boku $AB$ trójkąta $\triangle ABC$, a jego środek oznaczamy $J_{AB}$. Dalej $I$ oznacza środek okręgu wpisanego w $\triangle ABC$, a $J = J_{AB}$.

*Przy poniższych podpunktach warto pamiętać o sposobie, w jaki konstruowaliśmy $J_{AB}$ i własnościach dwusiecznych.*

1. Udowodnij, że punkty $C, I, J$ są współliniowe.
2. Uzasadnij, że $\sphericalangle IAJ = \sphericalangle IBJ = 90°$.
3. Niech $K$ będzie środkiem odcinka $IJ$. Wykaż, że $A, B, I, J$ leżą na okręgu o środku w $K$.
4. Dowiedź, że $K$ leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$, na dwusiecznej kąta $\sphericalangle BCA$ oraz na symetralnej odcinka $AB$.

**Wniosek 1.5.** *Dwusieczna kąta $\sphericalangle C$ i symetralna $AB$ przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na $\triangle ABC$.*