Nierówności , które warto znać, czyli atak na zadanie 6.

1. Średnie

   Wszystkie wyrazy musza być **dodatnie**.

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

   Równość zachodzi wtedy, gdy $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

   Funkcja $\sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,k}}{n}}$ jest niemalejąca.

$$w_1, w_2, ..., w_n > 0 \wedge w_1 + w_2 + ... + w_n = 1$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1 w_1}+\frac{1}{a_2 w_2}+...+\frac{1}{a_n w_n}} \leq a_1^{w_1} a_2^{w_2} ... a_n^{w_n} \leq w_1 a_a + w_2 a_2 + ... + w_n a_n$$

   Kilka przekształceń otrzymanych ze średnich:

$$1 + a \geq 2\sqrt{a}$$
$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$
$$2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

2. Sumy kwadratów i iloczynów

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}, n+1 = 1$$

   W szczególności ważne jest $n = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

3. Przekształcenie Abela (mało chyba ważne)

   Oba ciągi n – wyrazowe liczb rzeczywistych

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1})(a_1 + a_2 + ... + a_i) + b_n \sum_{i=1}^{n} a_i$$

4. Przegrupywanie

   Wszystkie wyrazy są nieujemne.

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} g(a_i, a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} - g(a_i, a_{i+1}) \right), n+1 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} g(a_i, a_j) = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{1}{n-1} f(a_i) + \frac{1}{n-1} f(a_j) - g(a_i, a_j) \right)$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(a_i)}{\prod_{i=1}^{n} g(a_i, a_{i+1})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{f(a_i) f(a_{i+1})}}{g(a_i, a_{i+1})}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - \sum_{i=1}^{n} g(a_i, a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(a_i) + (1-\alpha) f(a_{i+1}) - g(a_i, a_{i+1}))$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} f(a_i)}{\prod_{i=1}^{n} g(a_i, a_{i+1})} = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)^{\alpha} f(a_{i+1})^{1-\alpha}}{g(a_i, a_{i+1})}$$

5. Nierówność Bernoulliego

$$x > -1, \alpha \in R$$
$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow (1+x)^{\alpha} \le 1 + \alpha x$$
$$\alpha > 1 \Rightarrow (1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha x$$

   Równość zachodzi wtedy, gdy x=0.

6. Średnie po raz kolejny, ale ciekawsze

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_1 \right)^2 \le n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_1}$$

7. Nierówność Cauchy’ego

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

8. Nierówność Holdera

$$p, q \in R \wedge \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$p, q > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$pq < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

9. Nierówność Minkowskiego

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots . a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots . b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots . (a_n + b_n)}$$

Równość zachodzi wtedy, gdy $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

10. Nierówność Radona

$$p > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{p+1}}{b_i^p} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^{p+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^p}$$