# Nierówności I

Joachim Jelisiejew

25 października 2011

---

## 1.2 Starsi

*Test na intuicję: wstaw znaki w jak największej ilości poniższych podpunktów w ciągu 15 min. Sprawdź, ile Twoich odpowiedzi było prawdziwych. W przypadku, gdy nie umiesz wybrać jednej opcji, wybierz dwie.*

**Zadanie S1**
Wszystkie zmienne w nierównościach są rzeczywiste dodatnie.

We wszystkich poniższych nierównościach zastąp ⩾☠⩽ jednym ze znaków: $\geqslant, \leqslant, <>$.

- Wstaw $\geqslant$ lub $\leqslant$, jeżeli uważasz, że otrzymana w ten sposób nierówność jest prawdziwa.
- Wstaw $<>$ jeżeli uważasz, że zarówno po wstawieniu $\geqslant$ jak i $\leqslant$ otrzymamy nieprawdziwą nierówność.

Uzasadnij odpowiedź.

1. $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$ ⩾☠⩽ $\frac{9}{a^3+b^3+c^3}$
2. $\frac{4}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+2$ ⩾☠⩽ $2(a+b+c)$
3. $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$ ⩾☠⩽ $\frac{a+c}{b^2}+\frac{b+a}{c^2}+\frac{c+b}{a^2}$
4. $2(a+b+c)$ ⩾☠⩽ $\frac{4bc}{b+c}+\frac{4ca}{a+c}+\frac{4ab}{a+b}$
5. $2\,(a+b+c)$ ⩾☠⩽ $\frac{4a^2}{b+c}+\frac{4b^2}{a+c}+\frac{4c^2}{a+b}$
6. $a^3b+b^3c+c^3d+d^3a$ ⩾☠⩽ $4abcd$
7. $a^3b+b^3c+c^3d+d^3a$ ⩾☠⩽ $a^2dc+b^2ad+c^2ba+d^2cb$
8. Jeżeli $abcd=1$ to $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$ ⩾☠⩽ $16$
9. Jeżeli $abcd=1$ to $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$ ⩾☠⩽ $a^2+b^2+c^2+d^2$
10. $3\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ⩾☠⩽ $2\big(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)\big)$

*K.K. (rozwinięcie na kółku)*

**Zadanie S2**
Niech $a_1,\ldots,a_n$ będą dodatnie, niech $S := a_1+a_2+\ldots+a_n$. Udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

**Zadanie S3**
Niech $a,b \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Udowodnić, że

$$\sqrt[2011]{ab}+\sqrt[2011]{b(1-a-b)}+\sqrt[2011]{(1-a-b)a} \leqslant \sqrt[2011]{3^{2009}}.$$

**Zadanie S4**
Liczby $a_1,\ldots,a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\frac{(a_1+\ldots+a_n)^i}{i!}.$$