



Alfowanie i denormalizacja

1.1 Grupowanie

1. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{\sqrt{a^2bc} + \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + (a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3}$$

Źródło: Koło PTMu - 6 młodszy grudzień 2006

2. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b zachodzi

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \geq \frac{5}{2}$$

Źródło: Zadania przygotowawcze do konkursu PTM

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right)$$

Źródło: Pawłowski

1.2 Alfowanie

1. Niech a, b będą liczbami dodatnimi, takimi, że $a + b = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

Źródło: Jungary 1996, Hoojoo Lee

2. Wykazać, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + c^2d + d^3} + \frac{d^4}{d^3 + d^2a + a^3} \geq \frac{a+b+c+d}{3}$$

Źródło: Staszic

1.3 Denormalizacja, nowe horyzonty

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność Nesbitta

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Źródło: known

2. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Udowodnij, że

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$