Dwumian Newtona

JOACHIM JELISIEJEW
18 PAŹDZIERNIKA 2011

Przypominam, że

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} & k > 0 \\ 1 & k = 0. \end{cases}$$

Definicja ma sens dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, n \in \mathbb{R}$ (!). Jeżeli $0 \leqslant k \leqslant n$ oraz n, k są całkowite to $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, pamiętajmy, że $0! = 1$.

ZADANIE 1
Dla liczby rzeczywistej x definiujemy *podłogę z x* jako największą liczbę całkowitą nie większą niż x, w szczególności z definicji wynika, że $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ i $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$.

1. Udowodnij, że $x \leqslant y$ implikuje $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
2. Udowodnij, że dla liczb naturalnych k, l zachodzi $\left\lfloor \frac{k}{l} \right\rfloor = \frac{k}{l} \iff l \big| k$.
3. Uzasadnij, że $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ (*wskazówka:* $\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$*, o ile* $a, b \in \mathbb{Z}$).
4. Niech p będzie liczbą pierwszą, niech α będzie największą potęgą p, która dzieli $n!$ (n silnia). Udowodnij, że
$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$
przy czym suma po prawej jest skończona.
5. Oblicz, w zależności od p, n, k, ile razy liczba pierwsza p dzieli $\binom{n}{k}$.
6. Udowodnij, że jeżeli p jest pierwsza, a $l \geqslant 0$ całkowite, to $p \Big| \binom{p^l}{k}$ dla każdego całkowitego $k : 0 < k < p^l$.
7. Uzasadnij, że jeśli $l \geqslant 0$ jest całkowite, a p pierwsze, to $(1+x)^{p^l} \equiv 1 + x^{p^l} \mod p$, to znaczy, że wielomian $(1+x)^{p^l} - 1 - x^{p^l}$ ma współczynniki podzielne przez p.

   Wywnioskuj z tego przez indukcję, że $a^{p^k} \equiv a \mod p$ dla każdego a całkowitego. Dowiedź tego samego stosując małe twierdzenie Fermata.
8. Uzasadnij, że jeżeli p jest pierwsze a $k > 0$ całkowite, to $p \Big| \binom{pk}{k}$.

Interpretacje kombinatoryczne.

ZADANIE 2
Udowodnij, że liczba najkrótszych dróg kratowych łączących $(0,0)$ z (x,y), gdzie $x, y \in \mathbb{N}$, wynosi $\binom{x+y}{y}$.

ZADANIE 3
Wykaż, że sposobów umieszczenia n ulotek (nierozróżnialnych) w k skrytkach na listy jest $\binom{n+k-1}{k-1}$.

ZADANIE 4
Pokaż, że ilość nieujemnych rozwiązań całkowitych równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ w zmiennych $x_1, \ldots, x_k$ to $\binom{n+k-1}{k-1}$. Ile jest takich rozwiązań w liczbach całkowitych?

ZADANIE 5
Uzasadnij, że liczba funkcji ściśle rosnących $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ jest równa $\binom{n}{k}$.

Twierdzenie (Twierdzenie Lucasa). *Niech p będzie pierwsza a $a \geqslant b$ całkowite. Zapiszmy a, b w systemie pozycyjnym o podstawie p jako*

$$a = \left(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}\right)_p, \quad b = \left(\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_0}\right)_p$$

ewentualnie uzupełniając z przodu zerami, by długości zapisu były równe. Wtedy

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_n}{b_n} \cdot \binom{a_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \binom{a_0}{b_0} \mod p.$$