



# Miks zadań

tylko dłaczego wszystkie trudne?

KÓŁKO I LO BIAŁYSTOK  
31 STYCZNIA 2013

---

*Uwaga: to niekoniecznie są zadania, które pojawiłyby się na OMie.*

## ZADANIE 1

W zajęciach na feriach w ILO uczestniczy 10 osób. Przed pięciogodzinówką Yogi schował zadania do szuflady. Zamki w szufladzie są skonstruowane tak, że każde 9 osób może otworzyć szufladę, ale żadne 8 osób nie może otworzyć szuflady. Ile co najmniej jest zamków?

## ZADANIE 2

Liczby  $a, b$  są dodatnie i mniejsze od 1. Wykazać, że  $a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} + 1 > 3ab$ .

## ZADANIE 3

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite nieujemne  $n < 2501$ , dla których liczba  $n^{11} - 2$  jest podzielna przez 2501.

## ZADANIE 4

Pomiędzy każdymi dwoma spośród  $n$  miast istnieje połączenie lotnicze lub połączenie kolejowe. Uzasadnij, że można wybrać typ połączeń, taki, że pomiędzy każdymi dwoma miastami da się przejechać (być może z przesiadkami) używając tylko tego typu połączeń.

## ZADANIE 5

Trójkąt ostrokątny nierównoramienny  $ABC$  jest wpisany w okrąg. Punkty  $P, Q$  są odpowiednio środkami tych łuków  $BC, CA$  okręgu  $o$ , które nie zawierają  $A, B$  odpowiednio.

Punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w  $\triangle ABC$ , a punkt  $R$  jest taki, że  $RPCQ$  jest równoległobokiem. Oblicz miarę kąta  $\sphericalangle CIR$ .

## ZADANIE 6

Udowodnij, że jeżeli nieparzysta liczba pierwsza  $p$  dzieli sumę liczb całkowitych  $a, b$ , to dla każdego  $n$  naturalnego

$$p^{n+1} \mid a^{p^n} + b^{p^n}.$$

## ZADANIE 7

Dany jest 1000-wyrazowy ciąg różnych liczb rzeczywistych. Dowieść, że z tego ciągu można wybrać 28-wyrazowy podciąg rosnący lub 38-wyrazowy podciąg malejący.

## ZADANIE 8

Dana jest taka liczba całkowita dodatnia  $k$ , że liczby  $p = 6k + 1, q = 12k + 1$  oraz  $r = 18k + 1$  są pierwsze. Niech  $n = pqr$ . Dowiedz, że dla każdego  $a$  całkowitego zachodzi  $n \mid a^n - a$ .

## ZADANIE 9 \*

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych  $n$ , że suma cyfr liczby  $3^n$  jest nie mniejsza niż suma cyfr liczby  $3^{n+1}$ .

## ZADANIE 10

Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$  takie, że  $(n - 1)!$  nie jest podzielna przez  $n^2$ .