Kółko 2.2^2 - nieróżności i różności

Nieróżności

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \cdots, a_n$ zachodzi nierówność
$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 \geq a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \cdots + a_{n-1}^2 a_n + a_n^2 a_1$$
2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq abc(a+b+c) = a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab$$
3. Suma nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c jest niewiększa od 3. Pokazać, że zachodzi nierówność
$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{2}$$
źródło: staszic
4. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{a\sqrt{a}}{a+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+a}$$
5. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{a+c} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a}$$
6. * Znajdź przykłady liczb i ciągów dodatnich, dla których poniższe nierówności nie są prawdziwe, lub udowodnij ich prawdziwość:
   (a) $a^4 b + b^4 c + c^4 d + d^4 a \geq a^3 bc + b^3 cd + c^3 da + d^3 ab$
   (b) $a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots + a_n b_n c_n \geq a_n b_1 c_1 + a_{n-1} b_2 c_2 \cdots + a_1 b_n c_n$ jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są niemalejące, a (c_n) jest nierosnący.
   (c) $a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots + a_n b_n c_n \leq a_n b_1 c_1 + a_{n-1} b_2 c_2 \cdots + a_1 b_n c_n$ jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są niemalejące, a (c_n) jest nierosnący.

Różności

1. Na tablicy $2n \times 2n$ zamalowano $3n$ pól. Udowodnij, że można tak dobrać n kolumn i n wierszy tej tablicy, żeby każde zamalowane pole leżało w pewnej wybranej kolumnie lub w pewnym wybranym wierszu.(źródło: staszic)
2. Mamy daną płaszczyznę, podzieloną liniami poziomymi i pionowymi na kwadraty 1×1. W każdy kwadrat wpisujemy liczbę naturalną, przy czym żadna liczba nie jest wpisana więcej niż raz. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n, że mozna wskazać dwa sąsiednie pola, takie, że różnica liczb wpisanych w te pola jest większa od n. (źródło: zadania przygotowawcze do Podlaskiego Konkursu Matematycznego)
3. P jest takim wielomianem o współczynnikach całkowitych, że zarówno równanie $P(x) = 1$ jak i $P(x) = 3$ ma co najmniej jedno rozwiązanie całkowite. Rozstrzynij, czy równanie $P(x) = 2$ może mieć 2 różne rozwiązania całkowite. (źródło: staszic)
4. Niech $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. Udowodnić, że $a_n \geq \frac{1}{2}$:)