Mix zadaniowy

1.1 Zadania na dzień dobry

1. Ambasadorów 2009 państw posadzono przy okrągłym stole, na którym umieszczone są proporczyki państw. Niestety żaden ambasador nie siedzi przy proporczyku swojego państwa. Uzasadnij, że można tak obrócić stół, że co najmniej dwóch ambasadorów będzie siedziało przy właściwych proporczykach.

2. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $1! + 2! + \ldots + n!$ jest kwadratem liczby całkowitej?

3. Na ile sposobów da się pokryć kwadrat 15×15 kwadratami 3×3 i 5×5?

4. Dany jest graf nieskierowany, prościej mówiąc wierzchołki połączone krawędziami (co najwyżej jedna krawędź pomiędzy dwoma różnych wierzchołkami, nie ma krawędzi prowadzących z wierzchołka do tego samego wierzchołka). *Stopniem* wierzchołka nazywamy ilość krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Uzasadnić, że pewne dwa wierzchołki mają ten sam stopień.

1.2 Zadania kółkowe

1. Niech a i b będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Liczbę naturalną n nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieją takie liczby całkowite nieujemne x, y, że $n = ax + by$.

   (a) Udowodnić, że liczba $n_0 = (a-1)(b-1) - 1$ nie jest dobra,

   (b) a $n_0 + 1$ i każda większa jest dobra.

2. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą.

   (a) Uzasadnij, że liczba a jest resztą kwadratową $\mod p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$.

   (b) Uzasadnij, że jeśli g jest generatorem $\mod p$ i a nie jest resztą kwadratową $\mod p$, to $(ag)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$ i w związku z tym ag nie jest generatorem $\mod p$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt M jest środkiem przekątnej AC i $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD$. Wykazać, że $MA^2 = MB \cdot MD$.

4. Dany jest okrąg o oraz punkty A i B. Skonstruować okrąg styczny do okręgu o, przechodzący przez punkty A i B.

5. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A. Wspólna styczna zewnętrzna tych okręgów przecina prostą łączącą ich środki w punkcie S. Prosta przechodząca przez S przecina okręgi o_1 i o_2 kolejno w punktach B, C, D, E. Wykazać, że kąt $\sphericalangle BAD$ jest prosty.